DST 2

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats et à respecter l'ordre des questions sur sa copie.

Ce sujet comporte 2 pages et 3 exercices indépendants

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) On se propose de d'étudier la somme suivante :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k+10}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$

a) En utilisant une décomposition en éléments simples, déterminer les réels a, b, c tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{4k+10}{(k+2)(k+3)(k+4)} = \frac{a}{k+2} + \frac{b}{k+3} + \frac{c}{k+4}$$

b) En se souvenant que $3 = 2 + 1$ en déduire la somme

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k+10}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$

2) On se propose de d'étudier la somme suivante :

$$U_n = \sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i^2}{2j+1}$$

a) Donner (sans explications) :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$

b) Calculer U_n.

Exercice 2 :

Partie 1 :

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par la relation : $u_n = \frac{2^n}{n}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.

2) Soit $A > 0$ fixé. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_N \geq A$ (on pourra utiliser librement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n) \leq n$).

3) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie 2 :

Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etudier la convergence de la suite (v_n) et si possible déterminer une formule explicite de v_n en fonction de n, que vous prendrez soin de démontrer.

Exercice 3 :

Partie 1 :

On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{e^x-1}{e^x+1}$

1) Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donner (sans justification) les limites.
3) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction au point d'abscisse 0.
4) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq \frac{1}{2}x$
5) Justifier que la fonction f définit une fonction réciproque (notée f^{-1}) dérivable dont on précisera l'ensemble de définition.
6) Déterminer f^{-1}.
7) Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Partie 2 :

On considère la fonction $g : x \longmapsto \text{Arctan}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
2) Calculer la dérivée de la fonction g.
3) Déterminer les variations de la fonction g et donner (sans justification) les limites.
4) Résoudre l'équation : $g(x) = \frac{\pi}{6}$

Partie 3 :

1) Montrer que $\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}(-1)\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2) Montrer que :

$$\text{Arctan}\left(-\frac{1}{3}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}(-1)$$

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (notée (ε)) suivante :

$$\text{Arctan}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \text{Arctan}(e^x) + \text{Arctan}(-2e^x)$$

3) Montrer que si x est une solution réelle de l'équation (ε), alors x est solution de l'équation :

$$2e^{3x} - e^{2x} + 2e^x - 1 = 0$$

4) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2e^{3x} - e^{2x} + 2e^x - 1 = 0 = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^{2x}+1)$$

5) En utilisant **Partie 3-Q1-Q4**, en déduire le(s) éventuelle(s) solution(s) de l'équation (ε).