DST 1
Corrigé

Exercice 1 - Moments du cosinus. Pour calculer $\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t) = t$ et $u'(t) = \cos t$, de sorte que $v'(t) = 1$ et $u(t) = \sin t$. Puisque les fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on réalise une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi v(t)u'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi v'(t)u(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [t\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = 0 - [-\cos t]_0^\pi = \cos(\pi) - \cos(0) = -2.\end{aligned}$$

Pour calculer $\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t) = t^2$ et $u'(t) = \cos t$, de sorte que $v'(t) = 2t$ et $u(t) = \sin t$. Puisque les fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on réalise une première intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi v(t)u'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi v'(t)u(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [t^2\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi 2t\sin t\,\mathrm{d}t = -2\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Une deuxième intégration par parties (que nous ne détaillons pas) permet d'obtenir

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t &= [t\times(-\cos t)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t \\ &= -\pi\cos(\pi) + 0\times\cos 0 + [\sin t]_0^\pi \\ &= \pi + \sin\pi - \sin 0 = \pi\end{aligned}$$

D'où au final

$$\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t = -2\pi.$$

Exercice 2 - Autour de $\frac{\pi}{8}$. On pose $x = \cos\frac{\pi}{8}$.

1. On a $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, donc par décroissance de la fonction cosinus sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ on a : $\cos\frac{\pi}{2} < \cos\frac{\pi}{8} < \cos(0)$, c'est-à-dire $0 < x < 1$.

On peut également constater que le point image de $\frac{\pi}{8}$ est dans le premier quart du cercle trigonométrique, et a donc son abscisse $\cos\frac{\pi}{8}$ qui est positive.

2. On a $\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{\pi}{8}$, et donc

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \cos(2\times\frac{\pi}{8}) = 2\cos(\frac{\pi}{8})^2 - 1,$$

ce qui donne bien

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2x^2 - 1.$$

3. On déduit que x est solution de l'équation

$$x^2 = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1) = \frac{\sqrt{2}+2}{4},$$

et donc que

$$x = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}.$$

Or on a vu que $x > 0$. Donc $x = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$.
On a de plus
$$(\sin\frac{\pi}{8})^2 = 1 - (\cos\frac{\pi}{8})^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$
On a donc
$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$
Par les mêmes arguments que ci-dessus, on déduit que $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 3 - Superposition de signaux.

1. Question de cours : Voir le cours

2. a. Cherchons $r_0 > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = r_0\cos(x-\phi).$$
D'après le cours (ou la question précédente), r_0 est donné par $r_0 = \sqrt{\sqrt{2}^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$, tandis que ϕ vérifie
$$\begin{cases} \cos\phi = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\phi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
On peut donc prendre $\phi = -\frac{\pi}{4}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on applique l'identité trouvée avec $x = 3t$, et on obtient
$$S_1(t) - S_2(t) = 2\cos(3t + \frac{\pi}{4}).$$

b. On a
$$S_1(t) = S_2(t) \iff S_1(t) - S_2(t) = 0 \iff \cos(3t + \frac{\pi}{4}) = 0.$$
Il nous reste à résoudre cette équation trigonométrique. D'après le cours (ou un dessin utilisant le cercle trigonométrique), on a
$$\begin{aligned}\cos(3t+\frac{\pi}{4}) = 0 &\iff \left(3t + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3t + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right) \\ &\iff \left(t \equiv \frac{\pi}{12}\ [\frac{2\pi}{3}] \quad \text{ou} \quad t \equiv -\frac{\pi}{4}\ [\frac{2\pi}{3}]\right)\end{aligned}$$
Si on n'est pas à l'aise avec les congruences, on peut procéder ainsi :
$$\begin{aligned}\cos(3t+\frac{\pi}{4}) = 0 &\iff \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \ 3t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \ 3t + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ &\iff \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \ t = \frac{\pi}{12} + k \times \frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \ t = -\frac{\pi}{4} + k \times \frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}$$
Deux solutions sont par exemple $t = \frac{\pi}{12}$ et $t = -\frac{\pi}{4}$.

c. On peut utiliser la question **2a**, ou bien développer le carré :
$$\begin{aligned}(S_1(t) - S_2(t))^2 &= S_1^2(t) + S_2^2(t) - 2S_1(t)S_2(t) \\ &= 2(\cos^2(3t) + \sin^2(3t)) - 4\sin(3t)\cos(3t) \\ &= 2(1 - \sin(6t)).\end{aligned}$$

3. a. L'équation caractéristique associée à cette équation est $r^2 + 9 = 0$. Son discriminant est $\Delta = -36 < 0$. On déduit d'après le cours qu'une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution si et seulement si il existe des constantes λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda\cos(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t) + \mu\sin(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t) = \lambda\cos(3t) + \mu\sin(3t) \tag{1}$$

b. La fonction $S_1 - S_2$ est bien de la forme (1), avec $\lambda = \sqrt{2}$ et $\mu = -\sqrt{2}$.

c. Notons que, avec la question **2a**, on a

$$(S_1 - S_2)(-\frac{\pi}{4}) = 2\cos\left((3 \times (-\frac{\pi}{12}) + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos 0 = 2.$$

Ainsi, la fonction $f(t) = \frac{1}{2}(S_2(t) - S_1(t))$ est encore solution de l'équation différentielle, car elle est de la forme (1), et vérifie de plus $f(-\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}(S_1 - S_2)(-\frac{\pi}{4}) = 1$.
Pour trouver d'autres solutions vérifiant cette condition, on cherche des réels λ et μ tels que

$$\lambda\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mu\sin(-\frac{\pi}{4}) = 1 \iff \lambda - \mu = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

N'importe quel couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant cette relation, par exemple $(\sqrt{2}, 0)$, correspond à une solution (donnée par (1)) vérifiant $y(-\frac{\pi}{12}) = 1$.

Exercice 4 - Logarithme et polynôme . Soit les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = x^2 - 9$$

1. Les racines du polynôme f sont 3 et -3 (évitons d'avoir recours au discriminant pour trouver cela). Ainsi, f est du signe du coefficient dominant, à savoir positif, sauf entre les racines du trinôme. On a donc

$$f(x) \leqslant 0 \iff x \in [-3, 3].$$

2. On souhaite définir la fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 9)$, sur $\{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$. D'après la question précédente, on peut poser $I =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$, et on peut définir la fonction h sur I par $h(x) = \ln(x^2 - 9)$.
On constate que sur I, on a $h = \ln \circ f$, et donc

$$\forall x \in I, \quad h'(x) = f'(x) \times \frac{1}{f(x)} = \frac{2x}{x^2 - 9}.$$

Exercice 5 - Une équation différentielle. On rappelle que l'équation différentielle à étudier est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - y(t) = e^{-2t}. \tag{2}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 linéaire à coefficients constants avec second membre.

1. L'équation homogène associée à (2) est

$$y' - y = 0.$$

Une fonction y est solution de cette équation différentielle si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \lambda e^t.$$

2. Notons $y_p : t \mapsto \alpha e^{-2t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer. On a $y_p'(t) - y_p(t) = -2\alpha e^{-2t} - \alpha e^{-2t} = -3\alpha e^{-2t}$. Ainsi, pour que y_p soit solution de (2), il suffit que $-3\alpha = 1$, ce qui équivaut à $\alpha = -\frac{1}{3}$. En conclusion, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y_p(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t}$$

est une solution particulière de (2).

3. D'après le théorème de superposition, une fonction est solution de l'équation différentielle (2) si et seulement si elle est la somme de y_p et d'une solution de l'équation homogène. Ainsi, les solutions de (2) sont exactement les fonctions y de la forme

$$y(t) = \lambda e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

4. Soit y une telle solution. Alors d'après la question précédente, on sait que y est de la forme (3) On a alors $y'(t) = \lambda e^t + \frac{2}{3}e^{-2t}$, et la condition $y'(0) = 1$ est équivalente à

$$\lambda e^0 + \frac{2}{3}e^0 = 1,$$

et donc à $\lambda = \frac{1}{3}$. Ainsi il y a une unique solution vérifiant de plus $y'(0) = 1$, il s'agit de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$.

5. Soit y une telle solution, de la forme (3). Si $\lambda > 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$, tandis que si $\lambda < 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$.

Par contre, si $\lambda = 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. Conclusion : il y a une seule solution qui vérifie la condition $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$, il s'agit de la fonction y_p.

Exercice 6 - Un peu de complexes. Soient les nombres complexes $z_A = 1 + i$ et $z_B = 3 - i$.

1. Représenter A et B, les points images de z_A et z_B dans le plan complexe.

2. On a

$$z_A + z_B = 1 + i + 3 - i = 4 \quad \text{et } z_A z_B = (1+i)(3-i) = 3 - i + 3i - i^2 = 4 + 2i.$$

On a également

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{1+i}{3-i} = \frac{(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{2+4i}{3^2+1} = \frac{2}{10} + \frac{4}{10}i = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Finalement, on a $|z_A| = \sqrt{2}$ et $|z_B| = \sqrt{10}$.

3. On a $z_A^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.

4. On a après calculs :

$$z^2 - z_A^2 = (x+iy)^2 - 2i = x^2 + y^2 + i(2xy - 2).$$

Ainsi,

$$z^2 - z_A^2 \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z^2 - z_A^2) = 0 \iff 2xy - 2 = 0 \iff xy = 1.$$

Lorsque $x = 0$ ou $y = 0$, on a $xy = 0$, et z ne vérifie pas la condition. Autrement, z vérifie la condition si et seulement si $y = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire si et seulement si le point d'affixe z est sur une des deux branches de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.