Concours blanc

Exercice 1 - .

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, on introduit l'intégrale $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. **a.** Calculer $I_0(x)$.

   b. Montrer que
$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad I_n(x) = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}(x).$$

   c. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto I_n(x)$ a une limite en $+\infty$, notée J_n.

   d. Donner pour $n \geqslant 1$ une relation entre J_n et J_{n-1}, et en déduire J_n.

2. Soit la fonction $F : x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   a. Montrer que
$$\forall x \geqslant 1, \quad (x^2 - x)e^{-x^4} \leqslant F(x) \leqslant (x^2 - x)e^{-x^2}.$$

   b. Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

   c. Déterminer la dérivée de la fonction F.

Exercice 2 - . Soit $\theta \in [0, \pi[$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}$ (on distinguera selon les valeurs de θ).
2. Pour $x \in [-1, 1[$, on pose
$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}$$
   Calculer $F(x)$, et en déduire que pour $\theta \in]0, \pi[$, on a
$$F(0) = -\frac{1}{\sin\theta}\left(\operatorname{Arctan}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \operatorname{Arctan}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
3. Pour $\theta \in]0, \pi[$, exprimer $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ en fonction de $\frac{\theta}{2}$.
4. Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, en déduire une expression simplifiée de $F(0)$. On pourra utiliser librement la formule
$$\forall x > 0, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$