Concours blanc

Exercice 1 - . Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ par

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Montrer que φ définit une bijection, en précisant l'ensemble d'arrivée.
2. Montrer que
$$z \in \mathbb{R} \iff \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$$
3. Que vaut $\varphi(\mathbb{R})$, l'image directe de $\mathbb{R}$ par la fonction φ ?

Exercice 2 - . Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$u(P) = XP'' + P'.$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. En déduire que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Donner la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer u^2 et u^3.
4. Montrer que $u + \mathrm{Id}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, et en utilisant sa matrice, donner celle de $(u + \mathrm{Id})^{-1}$.
5. Déduire une solution polynomiale de l'équation différentielle
$$xy'' + y' + y = x.$$

Exercice 3 - . Soit u la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2}(y + z, y + z, y + z).$$

On admet que u est linéaire.

1. Donner la matrice de u dans $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer son noyau, son image et son rang.
3. Montrer que u est un projecteur de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire qu'il vérifie $u \circ u = u$.
4. Soit la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$, avec $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (0, 1, 0)$ et $f_3 = (1, 0, 1)$. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice de u lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la base $\mathcal{B}'$