DST 6

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Deux questions de cours.

Exercice 2 - Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f : (x, y, z) \mapsto (-x + y + z, 3x - 2y - 4z, -2x + y + 3z).$$

On sait que ce type de fonction est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminons $\ker(f)$, on a :

$$(x, y, z) \in \ker(f) \iff f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Après échelonnement par pivot (je vous laisse les détails) :

$$(x, y, z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}.$$

Ainsi, on a

$$\ker(f) = \{(2z, z, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ avec } z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2, 1, 1)).$$

Ainsi, le vecteur $(2, 1, 1)$ est une base de $\ker(f)$ et donc $\ker(f)$ est de dimension 1 : c'est une droite.

2. On sait déjà d'après le théorème du rang et la question précédente que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 2$. Le plus efficace est maintenant de raisonner par transfert d'une base : la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, et donc on a

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \mathrm{Vect}((-1, 3, -2); (1, -2, 1); (1, -4, 3)).$$

Il ne faut pas en rester là, car l'énoncé demande une base, et cette famille n'est pas forcément libre, on sait même que ce n'est pas le cas d'après la question précédente, car sinon on aurait $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$, ce qui n'est pas le cas. Comme les deux premiers vecteurs sont non colinéaires, ils forment une famille libre, et comme $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, ils forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi, la famille $((-1, 3, -2); (1, -2, 1))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

On pouvait bien sûr enlever n'importe lequel des trois vecteurs ici.

Ceux qui ont choisi de chercher des conditions sur (x, y, z) pour que le système $(x, y, z) = f(a, b, c)$ possède des solutions auront abouti sur une condition de compatibilité, cette solution fonctionne aussi.

Exercice 3 - Une forme linéaire avec la trace.

On appelle *trace* d'une matrice, notée tr, la somme de ses coefficients diagonaux. par exemple :

$$\mathrm{tr}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}) = 1 + 4 = 5.$$

On admet (et c'est facile à prouver) que la fonction tr : $M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application linéaire.

On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, et on considère la fonction $u : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$u : M \mapsto \mathrm{tr}(AM).$$

1. **a.** Soient M_1 et M_2 dans $M_2(\mathbb{R})$, ainsi que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda M_1 + \mu M_2) &= \mathrm{tr}(A(\lambda M_1 + \mu M_2)) = \mathrm{tr}(\lambda AM_1 + \mu AM_2) \\ &= \lambda\, \mathrm{tr}(AM_1) + \mu\, \mathrm{tr}(AM_2) \quad \text{car tr est linéaire} \\ &= \lambda u(M_1) + \mu u(M_2). \end{aligned}$$

Cela prouve que l'application u est linéaire.

b. On a : $M \in \ker(u) \iff u(M) = 0 \iff \mathrm{tr}(AM) = 0$. Notons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, commençons par calculer AM :

$$AM = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\mathrm{tr}(AM) = 0 \iff (a + 2c) + (3b + 4d) = 0 \iff a = -3b - 2c - 4d.$$

On a donc en réinjectant dans M :

$$\begin{aligned} \ker(u) &= \left\{ \begin{pmatrix} -3b - 2c - 4d & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ b \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\{ \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ (b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On montre assez facilement que la famille ci-dessus est libre, ainsi $\boxed{\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}$ est une base de $\ker(u)$. Donc $\boxed{\dim(\ker(u)) = 3}$.

c. C'est assez classique pour une application à valeurs dans $\mathbb{K}$ (on parle de *forme linéaire*) : le théorème du rang nous donne

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(\ker(u)) = 4 - 3 = 1,$$

or $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}$, et donc nécessairement $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}$. Cela prouve que u est surjective.

d. On sait qu'un supplémentaire de $\ker(u)$ dans $M_2(\mathbb{R})$ est de dimension 1, il suffit de prendre n'importe quelle matrice non nulle qui n'est pas dans $\ker(u)$, par exemple $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors on a bien

$$M_2(\mathbb{R}) = \ker(u) \bigoplus \mathrm{Vect}(E_{11}).$$

En effet, on a bien l'égalité des dimensions, et il est direct que $\ker(u) \cap \mathrm{Vect}(E_{11}) = \{0\}$ (détails laissés à l'élève) ;

2. Pour un réel $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $v : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ par

$$v(M) = \alpha M + M^T.$$

a. Déjà, v est bien à valeurs dans $M_2(\mathbb{R})$. Montrons qu'elle est linéaire : soient $(M, N) \in M_2(\mathbb{R})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{aligned} v(\lambda M + \mu N) &= \alpha(\lambda M + \mu N) + (\lambda M + \mu N)^T \\ &= \alpha(\lambda M + \mu N) + \lambda M^T + \mu N^T \\ &= \lambda(\alpha M + M^T) + \mu(\alpha N + N^T) \\ &= \lambda v(M) + \mu v(N). \end{aligned}$$

b. Dans ces questions, on fixe $\alpha = -1$

(i) Le plus efficace est d'utiliser le transfert de base. Rappelons que la base canonique est de $M_2(\mathbb{R})$ est $(E_{ij})_{i,j}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(v) &= \mathrm{Vect}(u(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}), u(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}), u(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}), u(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}))\\
&= \mathrm{Vect}(0, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, 0, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix})\\
&= \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix});
\end{aligned}$$

puisque $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

On déduit directement que $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 1$.

(ii) On cherche de manière standard $M \in \ker(v)$ sous la forme $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, on trouve que $b = c$, et on conclut comme d'habitude.

Voici une méthode plus roublarde : on peut aussi (et c'est la même chose) remarquer que

$$M \in \ker(v) \iff M^T = M \iff M \in S_2(\mathbb{R}) \ \text{(matrices symtriques)},$$

et donner 3 matrices symétriques évidentes : $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, puisque ces trois matrices forment une famille libre (direct), et que d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(v)) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Im}(v)) = 4 - 1 = 3$, cette famille est une base de $\ker(v)$. Finalement : $\ker(v)$ est l'ensemble des matrices symétriques, il est de dimension 3, et

$$\ker(v) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}).$$

(iii) Déterminons $\ker(v) \cap \mathrm{Im}(v)$: soit $M \in \ker(v) \cap \mathrm{Im}(v)$, alors on a avec les questions précédentes :

$$\begin{cases} M = \begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix}, \ (a, b, d) \in \mathbb{R}^3\\ M = \begin{pmatrix}0 & \lambda\\ -\lambda & 0\end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Après résolution directe, on trouve $M = 0$. Ainsi, $\ker(v) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0\}$. De plus, on a par le théorème du rang l'égalité des dimensions :

$$\dim(\ker(v)) + \dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(M_2(\mathbb{R})),$$

et donc

$$M_2(\mathbb{R}) = \ker(v) \bigoplus \mathrm{Im}(v).$$

Il est tentant de conclure que v est un projecteur, mais il faut savoir si $v \circ v = v$, or on a

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}), \quad v \circ v(M) = v(-M + M^T) = -(-M + M^T) + (-M + M^T)^T = M - M^T - M^T + M = 2(M - M^T).$$

A priori, $v \circ v \neq v$, pour être tout à fait rigoureux on vérifie par exemple avec la matrice $M = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ que $v \circ v(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}) \neq v(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix})$. Donc v n'est pas un projecteur.

c. Si $\alpha = \pm 1$, on vérifie que $\ker(v)$ est non nul : si $\alpha = -1$, $\ker(v)$ est l'ensemble des matrices symétriques, et par un raisonnement analogue, si $\alpha = 1$, $\ker(v)$ est l'ensemble des matrices anstisymétriques. Dans les deux cas $\ker(v) \neq \{0\}$, et v n'est pas injective, et donc pas bijective.

Supposons maintenant que $\alpha \neq \pm 1$. On peut montrer à la main que $\ker(v) = \{0\}$, et conclure par un argument de dimension, mais puisque l'énoncé nous propose la fonction réciproque, il suffit de vérifier. Posons $w : N \mapsto \frac{1}{1-\alpha^2}(-\alpha N + N^T)$ la fonction proposée par l'énoncé, on a

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}), \quad w(v(M)) = \frac{1}{1 - \alpha^2}(-\alpha v(M) + v(M)^T)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\alpha^2}(-\alpha(\alpha M + M^T) + (\alpha M + M^T)^T) \\
&= \frac{1}{1-\alpha^2}(-\alpha^2 M + M) = M.
\end{aligned}
$$

Cela prouve que $w \circ v = \mathrm{Id}_{M_2(\mathbb{R})}$, et puisque v est un endomorphisme, cela prouve que v est aussi bijective, et que $v^{-1} = w$ (en théorie il faut aussi vérifier que $v \circ w = \mathrm{Id}$, mais c'est automatique dans le cadre des applications linéaires).

d. On distingue deux cas :

- Si $\alpha \neq \pm 1$, alors comme la fonction v est bijective, on a

$$v(M) = A \iff M =^{-1} (A),$$

l'équation a donc une unique solution, que l'on calcule avec la formule de v^{-1} et l'expression de A.

- Si $\alpha = \pm 1$, alors, si l'equation $A = v(M)$ admet une solution M, c'est que $A \in \mathrm{Im}(v)$. Or, lorsque $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(v)$ est l'ensemble des matrices antisymétrique et symétrique, respectivement. Comme la matrice A n'est ni antisymétrique ni symétrique, l'équation n'admet pas de solution.

On pouvait bien sûr résoudre l'équation à la main dans les cas $\alpha = \pm 1$ et conclure à une incompatibilité.

Exercice 4 - Un endomorphisme de polynômes.

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et soit u la fonction définie sur E par

$$u : P \mapsto (2X^3 - X)P''' - X^2 P'' - 6P.$$

1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}_3[X]$

a. Déjà, on doit vérifier que u est à valeur dans E, ce qui n'est pas évident ici car le degré pourrait monter ? Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors on a :

$$\begin{cases} \deg(2X^3 - X)P''' = \deg(2X^3 - X) + \deg(P''') = 3 + \deg(P) - 3 \leqslant 3 \\ \deg(X^2 P'') = \deg(X^2) + \deg(P'') = 2 + \deg(P) - 2 \leqslant 3 \end{cases}, \quad \text{et par somme } \boxed{\deg(u(P)) \leqslant 3}$$

Cela prouve que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$. Il reste à montrer que u est linéaire. Soiit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_3[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$
\begin{aligned}
u(\lambda P_1 + \mu P_2) &= (2X^3 - X)(\lambda P_1 + \mu P_2)''' - X^2(\lambda P_1 + \mu P_2)'' - 6(\lambda P_1 + \mu P_2) \\
&= (2X^3 - X)(\lambda P_1''' + \mu P_2''') - X^2(\lambda P_1'' + \mu P_2'') - 6(\lambda P_1 + \mu P_2) \\
&= \lambda((2X^3 - X)P_1''' - X^2 P_1'' - 6P_1) + \mu((2X^3 - X)P_2''' - X^2 P_2'' - 6P_2) \\
&= \lambda u(P_1) + \mu u(P_2),
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que u est linéaire. Ainsi, u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Une base de $E = \mathbb{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$, ainsi, on a par transport,

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3))$$

On calcule les images de cette base :

$$\begin{cases} u(1) = -6 \\ u(X) = -6X \\ u(X^2) = X^2 \times 1 - 6X^2 = -8X^2 \\ u(X^3) = (X^3 - X) \times 6 - X^2 \times (6X) - 6X^3 = -6X \end{cases}$$

ainsi

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(-6, -6X, -8X^2, -6X) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2).$$

On reconnait une base de $\mathbb{R}_2[X]$, en conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}_2[X].}$$

c. D'après la question préédente, on a $\dim(\text{Im}(u)) = 3$. D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\ker(u) + \dim(\text{Im}(u)) \iff 4 = \dim(\ker(u)) + 3 \iff \boxed{\dim(\ker(u)) = 1.}$$

On peut bien sûr chercher $\ker(u)$ à la main, en résolvant $u(aX^3 + bX^2 + cX + d) = 0$. Mais ici, on a la réponse sous les yeux : on note que

$$u(X) = -6X = u(X^3) \iff u(X^3 - X) = 0 \text{ par linéarité,}$$

d'où $X^3 - X \in \ker(u)$, et pusque $\ker(u)$ est de dimension 1, on a

$$\ker(u) = \text{Vect}(X^3 - X).$$

d. Le théorème du rang assurant l'égalité des dimensions, il suffit de déterminer $\ker(u) \cap \text{Im}(u)$. Soit $P \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$, alors

$$\begin{cases} P \in \text{Im}(u) = \mathbb{R}_2[X] \\ P = \lambda(X^3 - X) \end{cases} \implies P = 0, \text{ pour des raisons de degré}$$

et donc $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$, ce qui prouve que $E = \text{Ker}(u) \bigoplus \text{Im}(u)$.

2. Dans cette question, $E = \mathbb{R}[X]$. Il est clair d'après ce qui précède que u est un endomorphisme de E.

a. Notons $a_n \in \mathbb{R}^*$ le coefficient dominant de P, alors :

$$\begin{cases} (2X^3 - X)P''' \text{ a pour terme dominant} 2n(n-1)(n-2)a_nX^n \\ -X^2P'' \text{ a pour terme dominant} - n(n-1)a_nX^n \\ -6P \text{ a pour terme dominant} - 6a_nX^n \end{cases}$$

Ains, si $P \in \ker(u)$, on a $u(P) = 0$, et le coefficient de degré n vaut 0, on a donc

$$2n(n-1)(n-2)a_n - n(n-1)a_n - 6a_n = 0 \iff 2n(n-1)(n-2) - n(n-1) - 6 = 0 \text{ car } a_n \neq 0.$$

On développe et on trouve l'équation demandée.

b. Notons $Q = 2X^3 - 7X^2 + 5X - 6$. Inspiré par la partie précédente, on remarque qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que $u(P) = 0$, de plus, 3 est un diviseur entier de $\frac{a_0}{a_n} = \frac{6}{2} = 3$. Ainsi, on teste :

$$Q(3) = 2 \times 27 - 7 \times 9 + 15 - 6 = 0.$$

Ainsi 3 est racine de Q, et on peut factoriser par $X - 3$. Le mieux est une division euclidienne de Q par $X - 3$, et on trouve :

$$\boxed{Q = (X-3)(2X^2 - X + 2)}.$$

Or le polynôme $2X^2 - X + 2$ a un discriminant $\Delta = -15 < 0$ négatif, donc il est irréductible sur $\mathbb{R}$, ainsi la décomposotion en facteurs irréductibles de Q est celle ci-dessus. En particulier, il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Par contre, les racines de $2X^2 - X + 2$ sur $\mathbb{C}$ sont $\frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$, ainsi, on a la décomposition irréductible sur $\mathbb{C}$ suivante (ne pas oublier le coefficient dominant) :

$$\boxed{Q = 2(X-3)(X - \frac{1 - i\sqrt{15}}{4})(X - \frac{1 + i\sqrt{15}}{4}).}$$

il est scindé sur $\mathbb{C}$, comme tout les polynômes non constants.

c. On a montré que si $P \in \ker(u) \backslash \{0\}$, alors $\deg(P) = 3$. Réciproquement, on a montré à la partie précédente que

$$\begin{cases} u(P) = 0 \\ \deg(P) \leqslant 3 \end{cases} \implies P = \lambda(X^3 - X).$$

Ainsi,

$$\boxed{\ker(u) = \text{Vect}(X^3 - X).}$$

d. En raisonnant encore sur le coefficient dominant, on montre encore que

$$\deg(Q) > 3 \implies \deg(u(Q)) = \deg(Q),$$

et donc Q ne peut pas être solution. D'un autre côté, on a vu que si $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $\deg(u(Q)) \leqslant 2$. Dans les deux cas, il est impossible d'avoir $u(Q) = X^3 - X$.

Exercice 5 - Quatre petits exercices de calculs effectifs indépendants chez les polynômes.

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f : x \mapsto \frac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6}{(x-2)(x^2+1)}.$$

a. Posons $P = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ et $Q = (X-2)(X^2+1)$. On effectue la division euclidienne de P par Q ; après calculs, on trouve que le quotient vaut $E = 2X + 1$ et le reste $R = 4X^2 - 2X + 8$, ainsi :

$$2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X^2+1) \times (2X+1) + 4X^2 - 2X + 8,$$

et donc en divisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, \quad \boxed{f(x) = 2x + 1 + \frac{4x^2 - 2x + 8}{(x-2)(x^2+1)}}.$$

b. Trouver a relève des techniques du cours : après multiplication par $x - 2$ et limite $x \to 2$, on trouve $a = 4$. Pour trouver b et c, on peut multiplier par $x^2 + 1$ et évaluer en $x = i$, on trouve :

$$\frac{4i^2 - 2i + 8}{i - 2} = bi + c \iff bi + c = \frac{4 - 2i}{i - 2} = -2$$

d'où par identification, $c = -2$ et $b = 0$. Il y avait d'autres méthodes, mais celle-ci fournit b et c en même temps. Finalement, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, \quad \boxed{f(x) = 2x + 1 + \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x^2+1}}.$$

c. D'après la question précédente, on a au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = 2x + 1 + o(1),$$

ce qui prouve que f admet pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ $\boxed{\text{la droite d'équation } y = 2x + 1}$.
Par ailleurs, on a au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{4}{x-2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4}{x} \quad \text{et} \quad \frac{2}{x^2+1} = o(\frac{1}{x}),$$

et donc

$$f(x) - (2x+1) = \frac{4}{x} + o(\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4}{x} > 0,$$

ce qui prouve que la courbe est $\boxed{\text{au-dessus de son asymptote}}$.

2. Soit la fonction réelle définie par $g : x \mapsto \frac{1}{x^3+3x^2+2x}$. Donner son ensemble de définition le plus grand possible, puis donner une primitive de g.

3. Soit le polynôme $(1+X)^4 - X^4$.

a. Notons P ce polynôme, alors en développant, les termes de degré 4 se compensent, et P est de degré 3, et son coefficient dominant est $\binom{4}{1} = 4$.
On a clairement $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, de plus P est continue, donc d'après le TVI, P admet au moins une racine réelle.

b. Le mieux est de repérer $a^2 - b^2$:

$$P = ((1+X)^2 + X^2)((1+X)^2 - X^2) = (1 + 2X + 2X^2)(1 + 2X).$$

Le polynôme $1 + 2X + 2X^2$ a un discriminant négatif, il est donc irreductible sur $\mathbb{R}$, et on a la décomposition en facteur irréductibles, en particulier, P n'est pas scindé sur $\mathbb{C}$.
Un calcul rapide de racines indique que $1 + 2X + 2X^2$ a pour racines $\frac{-1\pm i}{2}$, ainsi on a la décomposition sur $\mathbb{C}$ (ne pas oublier le coeff dominant) :

$$P = 2(2X+1)(X - \frac{-1-i}{2})(X - \frac{-1+i}{2}).$$

Il est scindé, comme tout polynôme sur $\mathbb{C}$.

4. Déjà, reperer qu'il s'agit bien sûr d'une FI. Comme le numérateur, noté P, est un polynôme, facile à dériver, il est logique d'utiliser les outils comme la formule de Taylor-Young. Le réel 2 est racine, mais quelle est sa multiplicité ? On remarque que

$$P(2) = 0 \quad \text{et } P'(2) = 0 \quad \text{et} \quad P''(2) = 8,$$

donc 2 est racine double, et on a au voisinage de 2 :

$$P(x) = \frac{P''(2)}{2}(x-2)^2 + o((x-2)^2) \underset{x \to 2}{\sim} \frac{P''(2)}{2}(x-2)^2 = 4(x-2)^2.$$

On déduit :

$$\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - x^3 - 14x^2 + 36x - 24}{(x-2)^2} = 4.}$$

Il était tout aussi naturel d'effectuer la divison euclidienne de P par $(X-2)^2$:

$$P = (X-2)^2(X^2 + 3X - 6),$$

et on retrouve bien sûr le même résultat.