DST 5

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Développement limité.

1. **a.** Voir cours.

b. Soit la fonction $f :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}$.

(i) On a, en 0 :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}\right) = \frac{1}{x}(1 - (1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2))) = \frac{x}{3} + o(x).$$

(ii) On déduit du développement limité que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, ainsi, la fonction f se prolonge par continuité en 0, et si on note encore f ce prolongement, on a $f(0) = 0$.

(iii) On rappelle que si f admet un DL à l'ordre 1 en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x),$$

alors elle est dérivable en 0, avec $f'(0) = a_1$. Ainsi, d'après la question **Q2a**, la fonction f prolongée en 0 est dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{3}$.

2. On rappelle que

$$e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2),$$

Donc, avec $u = x^2$, qui tend bien vers 0 lorsque $x \to 0$:

$$e^{x^2} - 1 - x^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{2},$$

et par quotients d'équivalents :

$$\frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^5} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2x},$$

3. **a.** On effectue un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$: Déjà, on tranforme un peu la fonction :

$$f(x) = \sqrt{x^4\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = x^2\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right).$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on utilise des DL. Rappelons que l'on a, en 0 :

$$\sqrt{1+h} = (1+h)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2) \quad \text{et} \quad \ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3).$$

En pensant à bien anticiper les ordres pour s'arrêter à $o(1)$, on déduit :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))\right)\times\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{x})^2+o(\frac{1}{x^2})\right)\\
&= (x^2+\frac{1}{2}x+o(x))\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)\\
&= 2x-2+o(1)+1-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})+o(1)\\
&= 2x-1+o(1)
\end{aligned}$$

Cela prouve que la courbe de f admet au vosinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y=2x-1$.

b. Il faut pousser les DL pour obtenir le terme suivant du développement asymptotique. On cherche à garder les termes en $\frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}-\frac{1}{8}(\frac{1}{x})^2+o(\frac{1}{x^2})\right)\times\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{x^2}+\frac{1}{3}\times(\frac{2}{x})^3+o(\frac{1}{x^3})\right)\\
&= (x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}+o(1))\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{8}{3}\times\frac{1}{x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right)\\
&= 2x-1+(\frac{8}{3}-1-\frac{2}{8})\times\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}) \quad \text{(on se concentre sur les termes croisés donnant du } \frac{1}{x}\text{)}\\
&= 2x-1+\frac{17}{12}\times\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})
\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$f(x)-(2x-1)\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{17}{12x}>0,$$

et donc la courbe f est au dessus de son asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2 - Espaces vectoriels (quatre exercices indépendants).

1. Soit $E=\mathbb{R}^4$. On considère les sous-ensembles suivants :

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x+y+z+t=0\\ -2x+2y+z+t=0\\ x+5y-z-6t=0\end{cases}\right\},\quad \text{et}\quad G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid -x-y+z+4t=0\}.$$

a. On échelonne le système, avec un pivot :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t,)\in F \quad &\iff \begin{cases} x+y+z+t=0\\ -2x+2y+z+t=0\\ x+5y-z-6t=0\end{cases}\\
&\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y+z+t=0\\ \quad 4y+3z+3t=0\\ \quad 4y-2z-7t=0\end{cases}\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} x+y+z+t=0\\ \quad 4y+3z+3t=0\\ \quad\quad -5z-10t=0\end{cases}
\end{aligned}$$

La dernière ligne donne $z=-2t$, et on remonte ensuite le système :

$$(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \iff \begin{cases} x=\frac{1}{4}t\\ y=\frac{3}{4}t\\ z=-2t\end{cases}.$$

Ainsi, on a

$$F=\{(\tfrac{1}{4}t,\tfrac{3}{4}t,-2t,t),\ \text{avec } t\in\mathbb{R}\}=\{t(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},-2,1),\ \text{avec } t\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},-2,1))=\mathrm{Vect}((1,3,-8,4)).$$

Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de E, et qu'une famille génératrice est formée par le vecteur $(1,3,-8,4)$. Comme une famille formée d'un seul vecteur non nul est toujours libre, la famille $((1,3,-8,4))$ est une base de F.

b. On a

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z,t) \in E \mid x = -y + z + 4t\} \\ &= \{(-y+z+4t, y, z, t), \text{ avec } (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{y(-1,1,0,0) + z(1,0,1,0) + t(4,0,0,1), \text{ avec } (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}((-1,1,0,0); (1,0,1,0); (4,0,0,1)). \end{aligned}$$

Cela prouve que G est un sous-espace vectoriel de E, et que la famille $(e_1, e_2, e_3) = ((-1,1,0,0); (1,0,1,0); (4,0,0,1))$ est génératrice de G.
Montrons que cette famille est libre (ce devrit être le cas car on a procédé par échelonnement à la question précédente) : soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0 \iff \begin{cases} -\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Cela prouve que (e_1, e_2, e_3) est une base de G.

c. Servons nous des questions, en particulier pour mieux décrire F : soit $u \in F$, alors on peut l'écrire $u = \lambda(1,3,-8,4)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $u \in G$, avec l'équation définissant G : on a

$$-\lambda - 3\lambda - 8\lambda + 4 \times 3\lambda = -12\lambda + 12\lambda = 0,$$

donc $u \in G$. Cela prouve que $F \subset G$.
Alors, on a $F + G = G$.

d. Soit $(a,b,c,d) \in E$, alors on a $(a,b,c,d) \in H \iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b,c,d) = \lambda(1,2,3,1) + \mu(3,2,1,1)$. Ainsi on résout :

$$\begin{cases} a = \lambda + 3\mu \\ b = 2\lambda + 2\mu \\ c = 3\lambda + \mu \\ d = \lambda + \mu \end{cases},\ \text{d'inconnues } (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

Le plus propre est un pivot :

$$\begin{cases} a = \lambda + 3\mu \\ b = 2\lambda + 2\mu \\ c = 3\lambda + \mu \\ d = \lambda + \mu \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\iff} \begin{cases} \lambda + 3\mu = a \\ -4\mu = b - 2a \\ -8\mu = c - 3a \\ -2\mu = d - a \end{cases} \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\iff} \begin{cases} \lambda + 3\mu = a \\ -2\mu = d - a \\ -8\mu = c - 3a \\ -4\mu = b - 2a \end{cases} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}}{\iff} \begin{cases} \lambda + 3\mu = a \\ -\mu = d - a \\ 0 = c - 4d + a \\ 0 = -2d + b \end{cases}$$

Les deux premières lignes forment un système échelonné, et fournissent une unique solution, à condition que les lignes (L_3) et (L_4), les conditions de compatibilités, soient vérifiées. Ainsi, on a

$$F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} c - 4d + a = 0 \\ -2d + b = 0 \end{cases} \}$$

Il est de bon goût de vérifier que les vecteurs $(1,2,3,1)$ et $(3,2,1,1)$ satisfont ces équations.

e. On se donne $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, puisque $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, on cherche à résoudre

$$(a,b,c,d) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \lambda e,\ \text{d'inconnue } (\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^4.$$

La résolution est directe :

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + 4\gamma + \lambda = a \\ \alpha = b \\ \beta = c \\ \gamma = d \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = a + b - c - 4d \\ \alpha = b \\ \beta = c \\ \gamma = d \end{cases}$$

Ainsi, le système possède une unique solution, ce qui prouve que $E = G \bigoplus \mathrm{Vect}(e)$.

f. On a d'après **Q1b** que $\dim(G) = 3$, puisqu'on a trouvé une base avec 3 éléments, tandis que $\dim(\mathrm{Vect}(e)) = 1$, car le vecteur e forme une base de $\mathrm{Vect}(e)$. D'un autre côté, on sait que la base canonique de $\mathbb{R}^4$ possède 4 éléments, donc $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Ainsi, on a bien

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(G) + (\mathrm{Vect}(e)).$$

Il reste à déterminer $G \cap \mathrm{Vect}(e)$. Soit $u \in G \cap \mathrm{Vect}(e)$, on a $u = (\lambda, 0, 0, 0)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, mais ce vecteur ne vérifie bien sûr pas l'équation de G, à moins que que $\lambda = 0$. Cela prouve que $G \cap \mathrm{Vect}(e) = \{0\}$. Par application du résultat fourni, on a bien $E = G \bigoplus \mathrm{Vect}(e)$.

2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit $F = \mathrm{Vect}(X^3 + X^2 + X + 2; X^2 - 2X - 1)$ et $G = \{P \in E,\ P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$.

a. Par définition, la famille $(X^3 + X^2 + X + 2, X^2 - 2X - 1)$ est génératrice de F. Elle est libre car ce sont des polynômes de degrés échelonnés (on peut aussi dire qu'ils sont non colinéairesà

b. Même si on pense que la réponse est non, il fait le justifier : on résout

$$X^3 + X + 1 = \lambda(X^3 + X^2 + X + 2) + \mu(X^2 - 2X - 1),$$

d'inconnue $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ 0 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda - 2\mu \\ 1 = 2\lambda - \mu \end{cases}.$$

Il est direct que ce système n'a pas de solution. Donc $X^3 + X + 1 \notin F$.

c. Soit $P \in E$, que l'on écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a alors

$$P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0 \iff \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}.$$

Echelonnons ce système :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -b - 2c - 3d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c + 2d \\ b = -2c - 3d \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} G &= \{(c + 2d)X^3 - (2c + 3d)X^2 + cX + d, \text{ avec } (c, d) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{c(X^3 - 2X^2 + X) + d(2X^3 - 3X^2 + 1) \text{ avec } (c, d) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}(X^3 - 2X^2 + X, 2X^3 - 3X^2 + 1) \end{aligned}$$

Cela prouve que G est un sous-espace vectoriel de E, et qu'une famille générarice de G est $(X^3 - 2X^2 + X, 2X^3 - 3X^2 + 1)$. Cette famille est libre car formée de deux polynômes non colinéaires

d. **(i)** Une base de $\mathbb{R}_3[X]$ est donnée par la famille $(1, X, X^2, X^3)$, ainsi $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.

(ii) Puisque les bases de F et G ont chacune deux éléments, on a $\dim(F) = \dim(G) = 2$, et donc on a bien $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Il reste à déterminer $F \cap G$. Soit $P \in F \cap G$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P = \lambda(X^3 + X^2 + X + 2) + \mu(X^2 - 2X - 1)$. On a alors :

$$P(1) = 5\lambda - 2\mu \quad \text{et} \quad P'(1) = 6\lambda.$$

Ainsi, si $P \in G$, on a $P(1) = P'(1) = 0$ ce qui donne $\lambda = 0$ puis $\mu = 0$ d'où $P = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0\}$. On applique le résultat proposé « dimension et supplémentaire » : on a alors $E = F \bigoplus G$.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2×2, et soit $F = \{M \in E \mid AM = 0\}$.

a. On écrit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors

$$AM = 0 \iff \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ -2a - 4c & -2b - 4d \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ -2a - 4c = 0 \\ -2b - 4d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}.$$

Ainsi, on a

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de E, et qu'une famille génératrice de F est $(M_1, M_2) = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Comme les matrices M_1 et M_2 sont non colinéaires, la famille (M_1, M_2) est libre. En conclusion, la famille (M_1, M_2) est une base de F.

b. Soit $M \in F \cap G$, comme $M \in G$, on a $M = \lambda I_2$. Puisque $M \in F$, on a

$$A \times (\lambda I_2) = 0 \iff \lambda A = 0 \iff \lambda = 0 \text{ car } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cela prouve que $F \cap G = \{0\}$. On pouvait aussi exploiter les relations entre les coefficients. Cela prouve que F et G sont en somme directe. Attention, ils ne sont pas supplémentaires dans E pour des raisons de dimension.

4. Soit $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, et soit $F = \{f \in E,\ f'(-1) = f'(1)\}$.

a. C'est la question standard. On a deux points à vérifier :

- La fonction nulle est dans F, c'est direct.
- Montrons que F est stable par combinaison linéaire. Soient $(f, g) \in F^2$ et soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)'(-1) &= \lambda f'(-1) + \mu g'(-1) \\ &= \lambda f'(1) + \mu g'(1) \text{ car } f \text{ et } g \text{ dans } E \\ &= (\lambda f + \mu g)'(1).\end{aligned}$$

  Cela prouve que $(\lambda f + \mu g) \in F$.

Ces deux points prouvent que F est un sous-espace vectorielde E.

b. Il faut bien sûr dériver l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f'(x) + 2\lambda x.$$

On évalue en 1 et -1 :

$$\begin{cases} g'(-1) = f'(-1) - 2\lambda \\ g'(1) = f'(1) + 2\lambda \end{cases}$$

On soustrait les deux lignes, et on utilise que $f'(1) = f'(-1)$, puisque $f \in F$:

$$\lambda = \frac{1}{4}(g'(1) - g'(-1)).$$

c. Soit $g \in E$ fixé, on cherche $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$g = f + \lambda h.$$

Procédons par analyse-synthèse : la question précédente conduit à avoir nécessairement

$$\lambda = \frac{1}{4}(g'(1) - g'(-1)),$$

et donc nécessairement à avoir

$$f = g - \frac{1}{4}(g'(1) - g'(-1))h.$$

L'analyse est finie, et garantie l'unicité de f et $\lambda \in \mathbb{R}$, s'ils existent.
Synthèse : soit λ et f tels que définis ci-dessus. Il est alors direct que $f + \lambda h = g$. Mais il faut vérifier qu'on a bien $f \in F$: On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = g'(x) - \frac{1}{2}(g'(1) - g'(-1))x.$$

On déduit :

$$f'(-1) = g'(-1) + \frac{1}{2}(g'(1) - g'(-1)) = \frac{1}{2}(g'(1) - g'(-1)) \quad \text{et} \quad f'(1) = g'(1) - \frac{1}{2}(g'(1) - g'(-1)) = \frac{1}{2}(g'(1) - g'(-1)).$$

En conclusion, on a bien $f'(-1) = f'(1)$, et donc $f \in F$.
En conclusion, on a montré :

$$\forall g \in E, \exists!(f, \lambda) \in F \times \mathbb{R}, \quad g = f + \lambda h.$$

Cela prouve que $E = F \bigoplus \mathrm{Vect}(h)$.
Remarque : On peut vérifier que $F \cap \mathrm{Vect}(h) = \{0\}$, mais ce n'est pas nécessaire puisqu'on a montré l'unicité de la décomposition dans notre analyse.
Notez que cela marche à partir du moment que $h \in E \backslash F$.

Exercice 3 - Un petit peu de géométrie.

1. On utilise la forme canonique :

$$x^2 + 2x + y^2 - 10y = 10 \iff (x+1)^2 - 1 + (y-5)^2 - 25 = 10 \iff (x+1)^2 + (y-5)^2 = 36 = 6^2.$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $A(-1;5)$ et de rayon 6.

2. On peut montrer que les coordonnées de B vérifient l'équation du cercle, mais il y a plus direct : on calcule :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \| \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{27+9} = 6,$$

Cela prouve que $B \in \mathscr{C}$.
Notons D la droite cherchée, alors cette droite passe par B, et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ (que nous avons déjà calculé). Soit $M(x,y)$ un point du plan, alors on a

$$\begin{aligned} M \in D &\iff \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BM} \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1-3\sqrt{3} \\ y-2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 3\sqrt{3}x - 3y + 3\sqrt{3} - 21 = 0 \\ &\iff y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} - 7 \end{aligned}$$

3. **a.** On a $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, ainsi le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (PQ). Soit $M(x,y)$ un point du plan, alors on a

$$\begin{aligned} M \in D &\iff \overrightarrow{PQ} /\!/ \vec{u} \iff [\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}] = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2-k \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff y - 2 - k - 2(x-1) = 0 \\ &\iff y = 2x + k \end{aligned}$$

b. Résoudre explicitement est fastifieux, il vaut mieux faire un travail qualitatif avec la distance entre A, le centre du cercle, et la droite (PQ). Comme l'équation de (PQ) est $2x - y + k = 0$, cette distance vaut

$$d = \frac{|2 \times (-1) - 5 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k-7|}{\sqrt{5}}.$$

On peut alors comparer d au rayon du cercle :

- Si $d > 6$, on a $\mathscr{C} \cap (PQ) = \varnothing$. Or :

$$d > 6 \iff |k-7| > 6\sqrt{5} \iff k \in]-\infty, 7-6\sqrt{5}[\cup]7+6\sqrt{5}, +\infty[.$$

- Si $d = 6$, alors $\mathscr{C} \cap (PQ)$ est réduit à un point (la droite est tangente au cercle). Or :

$$d = 6 \iff |k-7| = 6\sqrt{5} \iff k = 7 \pm 6\sqrt{5}.$$

- Si $d < 6$, alors $\mathscr{C} \cap (PQ)$ est formé de deux points distincts. Or :

$$d < 6 \iff |k-7| < 6\sqrt{5} \iff k \in]7-6\sqrt{5}, 7+6\sqrt{5}[.$$