DST 4

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Calcul d'une intégrale.

1. Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2+2t+3}$, en précisant l'ensemble de définition.

a. (i) Justifier sans calcul que $x \mapsto \cos x + \sin x$ admet un minimum et un maximum sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(ii) Déterminer le minimum de $x \mapsto \cos x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

(iii) Justifier que l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ est bien définie.

b. Pour $x \in]-\pi, \pi[$, on pose $t = \tan(\frac{x}{2})$. Montrer que

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

c. En effectuant le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$, déterminer I.

Exercice 2 - Une égalité à l'ordre 2. Soit $[a, b]$ un intervalle réel, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$. On souhaite démontrer une égalité, proche du TAF, mais à l'ordre 2 : on veut montrer que

$$\exists c \in]a, b[, \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

1. Pour une constante $A \in \mathbb{R}$, on définit

$$g_A : x \mapsto f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2} A.$$

Déterminer A, en fonction de a et b, de sorte que $g_A(a) = f(b)$.

2. La constante A est désormais fixée à celle trouvée à la question précédente. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'_A(c) = 0$.

3. Pour $x \in [a, b]$, calculer $g'_A(x)$.

4. En déduire que $A = f''(c)$.

5. Conclure

Exercice 3 - Une équation différentielle d'ordre 1.

1. Déterminer, à l'aide d'une IPP, les primitives de $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$.

2. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} + \frac{1}{xe^x + x}$$

3. Parmi les solutions, lesquelles vérifient $y(1) = 0$?

4. (Dur) Décrire la limite éventuelle des solutions en 0^+.

Exercice 4 - Une équation différentielle d'ordre 2.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = x^2 + e^{2x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 - Etude d'une fonction et d'une suite récurrente associée.

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \operatorname{Arctan}(\frac{2}{x}) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

1. **a.** Justifier que la fonction f est continue en 0.

b. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, et donner la valeur de $f'(0)$.

c. Déterminer les variations de la fonction f.

d. Montrer que $f([\frac{1}{2},2]) \subset [\frac{1}{2},2]$.

e. On rappelle qu'un point fixe de f est un nombre ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$. Montrer que f admet un unique point fixe sur $[\frac{1}{2},2]$. On pourra s'aider de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

a. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\frac{1}{2},2]$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{8}{17}|u_n - \ell|$.

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{8}{17}\right)^n \times \frac{3}{2}$.

d. Qu'en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 6 - Solutions d'un système 3 par 3.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = a \\ x + 2y - 3z = b \\ 7x + 4y - z = c \end{cases}$$

1. A quelle condition sur (a,b,c) le système admet-il une solution ?

2. On fixe $a = b = c = 0$, décrire les solutions du systèmes.