DST 3

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Merci de rendre les exercices 1, 2 et 3 sur une copie, et les exercices 4 et 5 sur autre copie indépendante.

Exercice 1 - Une approximation de Arcsin (environ 10 points).

1. Partie I : Une approximation de Arcsin.
   a. Montrer que : $\forall x \in [0,1[, \quad x \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
   b. En déduire une approximation de $\operatorname{Arcsin} \frac{3}{5}$ dont on donnera la précision.
2. Partie II : Etude d'une bijection.
   Soit $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
   a. Donner l'ensemble de définition, noté $\mathcal{D}$, le plus grand possible pour la fonction f.
   b. Déterminer la parité de f.
   c. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathcal{D}$.
   d. Montrer que la fonction f réalise une bijection, de l'intervalle $\mathcal{D}$ dans un intervalle J à préciser.
   e. On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Sans utiliser une expression de f^{-1} :
      (i) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J.
      (ii) M. Scotto prétend que $f^{-1}(\frac{3}{4}) = \frac{3}{5}$, êtes-vous d'accord ? Déterminer une équation de la tangente au graphe de f^{-1} au point d'abscisse $\frac{3}{4}$.
   f. Déterminer une expression de f^{-1} sur $J \cap [0, +\infty[$.

Exercice 2 - Somme de carrés (environ 5 points). Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f : (p, q) \mapsto p^2 + q^2$.

1. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
2. L'application f est-elle injective ?
3. L'application f est-elle surjective ?
4. (Dur). On rappelle que $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ est l'image directe de f : ce sont les éléments de $\mathbb{N}$ qui ont un antécédant par f. Montrer que si $N_1 \in \operatorname{Im} f$ et $N_2 \in \operatorname{Im} f$, alors $N_1 N_2 \in \operatorname{Im}(f)$. On fera un lien avec la formule $|zz'| = |z||z'|$ pour des nombres complexes z et z'.

Exercice 3 - Une suite implicite (environ 6 points). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f_n définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n : x \mapsto \sqrt{x} + n \ln x + n.$$

1. Justifier que f_n admet une unique racine (c'est-à-dire un point d'annulation), que l'on note u_n.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n \in]0, e^{-1}[$.
3. Pour $x \in]0, e^{-1}[$, comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
6. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en $+\infty$.

Merci de rendre les exercices 1, 2 et 3 sur une copie, et les exercices 4 et 5 sur autre copie indépendante.

Exercice 4 - Une formule pour l'argument (environ 13 points).

1. Montrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*, \quad x+\sqrt{x^2+y^2} > 0.$$

2. On rappelle qu'étant donné $z \in \mathbb{C}^*$, que l'on note $z = x+iy$, l'argument principal de $z \in \mathbb{C}^*$, noté $\arg(z)$, est l'unique nombre $\theta \in \mathbb{R}$ qui vérifie :
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{y}{|z|} \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta \in]-\pi,\pi].$$

a. Si $z \in]-\infty, 0[$, que vaut $\arg(z)$?

b. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$, on admet (c'est faisable mais un peu laborieux) que
$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x+|z|}\right) \notin \{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\} \iff z \notin i\mathbb{R}^*.$$
Justifier que dans ce cas-là, le nombre $\varphi = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x+|z|}\right)$ est bien défini, et que l'on peut calculer sa tangente.

c. Sous les hypothèses de la question précédente, montrer que $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$.

d. Toujours sous l'hypothèse $z \in \mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}_- \cup i\mathbb{R})$:

(i) Montrer que $\tan\varphi = \tan(\arg(z))$,

(ii) Si $y \neq 0$, montrer que φ, $\arg(z)$ et y sont de même signe.

(iii) Montrer que $\arg(z) = \varphi$.

3. On fixe $x_0 < 0$, et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par
$$f : y \mapsto 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x_0+\sqrt{x_0^2+y^2}}\right).$$

a. Donner (en justifiant) les éventuelles propriétés de parité de f.

b. Montrer que $\frac{y}{x_0+\sqrt{x_0^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x_0^2+y^2}-x_0}{y}$.

c. En déduire la limite suivante :
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y}{x_0+\sqrt{x_0^2+y^2}} = +\infty.$$

d. Montrer que f admet une limite en 0^+ et donner sa valeur.

e. Montrer que f admet une limite en 0^- et donner sa valeur.

Exercice 5 - Somme (environ 7 points). On définit, pour $n \geqslant 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}^k}.$$

1. Calculer S_3, puis en utilisant que $\frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2$, montrer que $\frac{30}{18} < S_3 < \frac{31}{18}$.

2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 4$, montrer que : $2^k \leqslant \sqrt{k}^k$.

4. Pour un entier $n \geqslant 4$, calculer $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k}$.

5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leqslant S_3 + \frac{1}{8}$.

6. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in]\frac{15}{9}, \frac{133}{72}]$.