DST 2

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Ce sujet comporte 2 pages et 6 exercices indépendants.

Exercice 1 - Questions de cours.

1. Soit u et v dérivables en un point $a \in \mathbb{R}$. Montrer, en revenant à la définition, que la fonction $x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable en a, et que l'on $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.
2. Soit $n \geqslant 2$, montrer, en revenant à la définition, que la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en 1, et donner la valeur de la dérivée.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé avec $x \not\equiv 0\ [2\pi]$, et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. Et si $x \equiv 0\ [2\pi]$?

Exercice 2 - Des (in)égalités (Questions indépendantes).

1. Résoudre $|x^2 - x - 6| \geqslant -x + 3$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, et illustrer avec un graphique.
2. **a.** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad 1 + x \leqslant e^x$. Illustrer.

   b. Montrer que : $\forall x \in [0, 2],\ e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + e^2 \times \frac{x^3}{6}$.

Exercice 3 - Etude d'une fonction.

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}.$$
   a. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, étudier sa parité éventuelle et ses limites.

   b. Montrer que la fonction f est minorée. A-t-elle un minimum ?

   c. Déterminer les variations de f, et montrer que f admet un maximum, que l'on déterminera.

   d. La fonction f est-elle bijective ?
2. On définit g sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$, ainsi la fonction g est la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Montrer que g est une bijection de $[0, +\infty[$ dans un ensemble à préciser, et déterminer la bijection réciproque g^{-1}. On précisera avec soin les ensembles de départ et d'arrivée de g^{-1}.

Exercice 4 - Deux méthodes pour des racines carrées. On pose $\omega = 1 + i$.

1. Résoudre l'équation $z^2 = \omega$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, en cherchant z sous forme exponentielle.
2. Résoudre la même équation en exploitant une forme algébrique.
3. En déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 5 - Quelques calculs de sommes (questions indépendantes).

1. (Différentes sommes avec des coefficients binomiaux)

a. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

b. Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$

c. En considérant la fonction auxiliaire $f(x) = (x+1)^n$, que l'on pourra primitiver, donner aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Ne pas oublier la constante !

2. Linéariser $(\sin x)^4$, et en déduire $\int_0^{\pi} \sin^4 x \,\mathrm{d}x$.

3. **a.** Déterminer $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-3, -1\}, \quad \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}.$$

b. En déduire $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$.

Exercice 6 - Triangle rectangle isocèle.

1. Soit A, B et C trois points distincts du plan, d'affixes respectives les nombres complexes $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$. On suppose que le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

2. Déterminer le module et un argument du complexe $\frac{c-a}{b-a}$.

3. En déduire c en fonction de a et b.

4. Donner tous les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que les images de $2z$, i et iz forment un triangle rectangle en i. Illustrer.