DST 1
Corrigé

Exercice 1 - Une somme de sinusoïdes. Vu en cours avec la technique de l'angle moitié. On écrit

$$\sin p + \sin q = \mathrm{Im}(e^{ip}) + \mathrm{Im}(e^{iq}) = \mathrm{Im}(e^{ip} + e^{iq}).$$

On cherche à factoriser cette somme d'exponentielle avec la technique de l'angle moitié :

$$\begin{aligned} e^{ip} + e^{iq} &= e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{-p+q}{2}}) \\ &= e^{i\frac{p+q}{2}} \times 2\cos(\frac{p-q}{2}) \text{ d'après la formule d'Euler} \\ &= 2(\cos\frac{p+q}{2} + i\sin\frac{p+q}{2}) \times \cos\frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(e^{ip} + e^{iq}) = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

ce qui prouve la formule.

Exercice 2 - Une somme de sinusoïdes.

1. On transforme la fonction : on cherche $r > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = r\cos(x - \phi).$$

On sait que $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, puis on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}).$$

2. On utilise la question **Q1** :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \iff \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0 &\iff x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2} \;\; [2\pi] \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{2} \;\; [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{3\pi}{4} \;\; [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{4} \;\; [2\pi] \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

On peut noter que les conditions ci-dessus se réecrivent $x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2} \;\; [\pi]$, et donc $\mathcal{S} = \{\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

3. On procède comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) > 0 \\ &\iff -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \text{ par lecture du cercle} \\ &\iff -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Il faut maintenant trouver les solutions qui sont dans l'intervalle $[0, 2\pi]$:

- Quand $k = 0$, on a l'intervalle de solutions $]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$, celles qui sont dans $[0, 2\pi]$ sont $]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\cap[0, 2\pi] = [0, \frac{3\pi}{4}[$.
- Quand $k = 1$, on a l'intervalle de solutions $]\frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}[$, celles qui sont dans $[0, 2\pi]$ sont $]\frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}[\cap[0, 2\pi] =]\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$.
- Pour les autres valeurs de k, on n'est plus dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

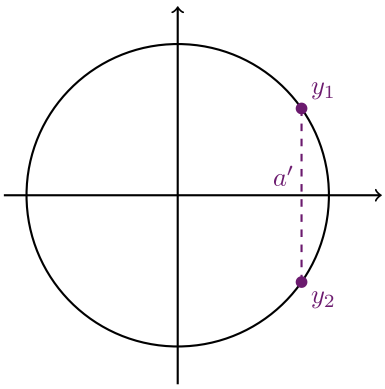
Au final, les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sur $[0, 2\pi]$ sont $[0, \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$

4. On se sert encore de la formule :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}).$$
Or on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \cos(x - \frac{\pi}{4}) \leqslant 1.$$
On déduit le résultat en mutipliant par $\sqrt{2}$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$, on s'intéresse à l'équation $f(x) = a$, d'inconnue $x \in [0, 2\pi]$.

a. D'après la question précédente, si $a \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, l'équation n'a pas de solution.

b. Si $a \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, on a déjà répondu : l'équation n'a pas de solution. Si $a = \pm\sqrt{2}$, on est amené à résoudre les équations $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ et $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -1$, qui n'ont chacune qu'une seule solution dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, à savoir $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{5\pi}{4}$.
Le dernier cas est celui où $a \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, on a alors $-1 < \frac{a}{\sqrt{2}} < 1$. On doit alors résoudre l'équation
$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = a' \quad \text{avec } a' = \frac{a}{\sqrt{2}} \in]-1, 1[.$$
Par lecture du cercle, l'équation a exactement deux solutions dans n'importe quel intervalle de longueur 2π. Rédigeons-le : par lecture du cercle, l'équation $\cos(y) = a'$ a exactement deux solutions dans un intervalle paramétrant le cercle, c'est-à-dire de longueur 2π, en particulier dans l'intervalle $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}[$, notons les y_1 et y_2. Alors, les solutions de l'équations $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = a'$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont exactement $x_1 = y_1 + \frac{\pi}{4}$ et $x_2 = y_2 + \frac{\pi}{4}$.



6. Soit la fonction $g : x \mapsto \cos x \times e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a. La fonction g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -(\cos x + \sin x)e^{-x} = -f(x)e^{-x}.$$
L'équation de la tangente en 0 est
$$y = g(0) + (x - 0)g'(0) = 1 - x.$$

b. Comme on vient de le voir, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -f(x)e^{-x},$$
et donc, puisque $e^{-x} > 0$, la dérivée g' est du signe de $-f$. On se sert des questions précédentes :

- Sur $[0, \frac{3\pi}{4}[$ et sur $]\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$, on a $f > 0$ et donc $g' < 0$.
- Ailleurs, c'est-à-dire sur $]\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[$, on a $f < 0$ et donc $f' > 0$.

On déduit facilement le tableau de variation de g :

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$e^{-\frac{7\pi}{4}}$	$\searrow$	$e^{-2\pi}$

Remarque : un physicien dit que “les variations de la fonction pseudo-périodique amortie $x \mapsto \cos x \times e^{-x}$ sont déphasées de $\frac{\pi}{4}$ par rapport aux variations du cosinus”.

Exercice 3 - Une primitive et une ipp.

1. On écrit :

$$x\cos(x^2) = \frac{1}{2} \times 2x\cos(x^2) = \frac{1}{2}u'(x)\cos(u(x)) \quad \text{avec } u(x) = x^2.$$

On reconnait la dérivée de $\sin u$. On déduit :

$$\int^x t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin(u(x)) = \frac{1}{2}\sin(x^2).$$

2. On écrit $x^3\cos(x^2) = x^2 \times x\cos(x^2)$. Comme les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x\cos(x^2)$ sont C^1, on fait une intégration par parties, en utilisant la question précédente.

$$\int^x t^3\cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \int t^2 \times t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t = [t^2 \times \frac{1}{2}\sin(t^2)]^x - \int^x 2t \times \frac{1}{2}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2\sin(x^2) - \int^x t\sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Cette dernière se calcule comme à la question précédente :

$$\int^x t\sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^x 2t\sin(t^2)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos(x^2).$$

Finalement :

$$\int^x t^3\cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(x^2\sin(x^2) + \cos(x^2))$$

Exercice 4 - Deux calculs de $\cos\frac{\pi}{12}$.

1. **a.** On met au même dénominateur : $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

b. Avec une formule d'addition :

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

2. Soit $z = \frac{6-6\sqrt{3}i}{4-4i}$.

a. On utilise la méthode du conjugué :

$$z = \frac{6 - 6\sqrt{3}i}{4 - 4i} = \frac{(6 - 6\sqrt{3}i) \times (4 + 4i)}{(4 - 4i) \times (4 + 4i)} = \frac{24(1 + \sqrt{3}) + 24(1 - \sqrt{3})i}{4^2 + 4^2} = \frac{24}{32}(1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i) = \frac{3}{4}(1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i)$$

b. On travaille séparément sur le numérateur et le dénominateur :

$$6 - 6\sqrt{3}i = 6(1 - i\sqrt{3}) = 12e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ après calculs standard },$$

et

$$4 - 4i = 4(1 - i) = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ après calculs standard.}$$

On fait le quotient :

$$z = \frac{12e^{-i\frac{\pi}{3}}}{4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}.$$

c. D'après la question précédente :

$$z = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos -\frac{\pi}{12} + i\sin -\frac{\pi}{12}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}),$$

et donc, par unicité de la forme algébrique, d'après la question **2a** :

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{3}{4}(1+\sqrt{3}) \iff \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Exercice 5 - Une équation différentielle d'ordre 1.

1. On veut résoudre

$$y'(x) - 4y(x) = x + e^{-x}. \tag{1}$$

On associe l'équation homogène :

$$y'(x) - 4y(x) = 0.$$

On la résout : ses solutions sont les fonctions

$$y_0(x) = \lambda e^{4x}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche maintenant une solution particulière. On procède en deux temps : on cherche séparément des solutions particulières y_{p_1} et y_{p_2} aux équations différentielles

$$y'(x) - 4y(x) = x \quad \text{et} \quad y'(x) - 4y(x) = e^{-x}.$$

Pour la première, on cherche y_{p_1} sous la forme $y_{p_1}(x) = ax + b$. On injecte, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \ y_{p_1}'(x) - 4y_{p_1}(x) = x &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \ a - 4(ax+b) = x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \ -4ax + (a-4b) = x \\
&\iff \begin{cases} -4a = 1 \\ a - 4b = 0 \end{cases} \quad \text{par identification des coefficients} \\
&\iff a = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $y_{p_1}(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}$.
On cherche maintenant y_{p_2} sous la forme $y_{p_2}(x) = ce^{-x}$. On procède de même et on trouve $y_{p_2}(x) = -\frac{1}{5}e^{-x}$.
Par superposition des solutions particlières, une solution de l'équation différentielle (1) est

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{16} - \frac{1}{5}e^{-x}.$$

Par superposition, l'ensemble des solutions est

$$\{x \mapsto y_0(x) + y_p(x) = \lambda e^{4x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16} - \frac{1}{5}e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2. Soit y une solution de (1). On utilise la question précédente : on a

$$y(0) = 1 \iff \lambda - \frac{1}{16} - \frac{1}{5} = 1 \iff \lambda = \frac{101}{80}.$$

Finalement, il y a une unique fonction qui répond à la question :

$$y(x) = \frac{101}{80}e^{4x} - \frac{1}{16}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-x}.$$

Exercice 6 - Une équation différentielle d'ordre 2. On associe l'équation homogène :

$$y''(x) + 4y(x) = 0.$$

L'équation caractéristique est $r^2+4=0$. Son discriminant est $\Delta = -16 < 0$, et les racines (complexes) sont $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$. L'équation homogène a donc pour solutions :

$$y_0(x) = (\mu\cos(2x) + \lambda\sin(2x))e^{0\times x} = (\mu\cos(2x) + \lambda\sin(2x)), \quad \text{avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche maintenant une solution particulière, sous la forme $y_p : x \mapsto Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$. On a

$$y_p'(x) = A\cos 2x - 2Ax\sin 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x$$

et donc

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= -2A\sin 2x - 2A(\sin 2x + 2x\cos 2x) + 2B\cos 2x + 2B(\cos 2x - 2x\sin 2x) \\ &= 4B\cos 2x - 4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x = 4B\cos 2x - 4A\sin 2x - 4y_p(x) \end{aligned}$$

Ainsi, y_p est solution si et seulement si

$$y_p''(x) + 4y_p(x) = \cos 2x - \sin 2x \iff 4B\cos 2x - 4A\sin 2x = \cos 2x - \sin 2x,$$

et une condition suffisante est l'identification des coefficients :

$$\begin{cases} 4B = 1 \\ -4A = -1 \end{cases} \iff A = B = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, une solution particulière est donnée par

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x(\cos 2x + \sin 2x).$$

D'après le théorème de superposition, l'ensemble des solutions est

$$\{x \mapsto \lambda\cos 2x + \mu\sin 2x + \frac{1}{4}x(\cos 2x + \sin 2x),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 7 - Des lieux géométriques.

1. On s'intéresse aux solutions de l'équation $|z-i| = |z-1+i|$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   - **a.** On introduit les points $A = (0,1)$ et $B = (1,-1)$, d'affixe respectives $a = i$ et $b = 1-i$, on a alors

     $$|z-i| = |z-1+i| \iff |z-a| = |z-b| \iff AM = BM.$$

     Ainsi, l'ensemble des points cherchés forment la médiatrice du segment $[A,B]$.
   - **b.** On écrit $z = x+iy$. On a alors :

     $$\begin{aligned} |z-i| = |z-1+i| &\iff |x+(y-1)i| = |x-1+i(y+1)| \\ &\iff |x+(y-1)i|^2 = |x-1+i(y+1)|^2 \text{ car tout est positif.} \\ &\iff x^2+(y-1)^2 = (x-1)^2+(y+1)^2 \\ &\iff x^2+y^2-2y+1 = x^2-2x+1+y^2+2y+1 \\ &\iff 4y = 2x-1 \\ &\iff y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

     On retrouve bien l'équation d'une droite. On peut vérifier facilement qu'elle passe par le milieu de $[A,B]$ et qu'elle est perpendiculaire au segment $[A,B]$ en montrant qu'un vecteur directeur est perpendiculaire à $\vec{AB}$.
2. On veut faire apparaître une quantité de la forme $|z-a|$ pour un $a \in \mathbb{C}$ fixé, mais le facteur parasite $(1+i)$ doit être traité. On le met en facteur :

   $$(1+i)z - 3 = (1+i)(z - \frac{3}{1+i}) = (1+i)(z - \frac{3(1-i)}{2}).$$

Ainsi, on a :

$$|(1+i)z-3|=1 \iff |1+i|\times|z-\frac{3(1-i)}{2}|=1 \iff \sqrt{2}\times|z-\frac{3(1-i)}{2}|=1 \iff |z-\frac{3(1-i)}{2}|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, on pose $a=\frac{3}{2}(1-i)$, et $A=(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$ le point associé. On note aussi M l'image de z, alors on a

$$|(1+i)z-3|=1 \iff |z-a|=\frac{1}{\sqrt{2}} \iff AM=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ainsi l'ensemble des solutions forme le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.