

DST 1

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Ce sujet comporte 2 pages et 7 exercices indépendants.

Exercice 1 - Question de cours : formule de Simpson. Montrer en utilisant des exponentielles complexes que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$



Exercice 2 - Une somme de sinusoides.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \cos x + \sin x.$$



1. Factoriser la fonction f en faisant intervenir une seule fonction trigonométrique.



2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.



3. Résoudre sur $[0, 2\pi[$ l'inéquation $f(x) > 0$.



4. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}.$$

5. Soit $a \in \mathbb{R}$, on s'intéresse à l'équation $f(x) = a$, d'inconnue $x \in [0, 2\pi[$.



a. Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles l'équation n'admet pas de solution.



b. Discuter en fonction de a le nombre de solution de l'équation (on ne cherchera pas à les calculer).

6. Soit la fonction $g : x \mapsto \cos x \times e^{-x}$.



a. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de g en l'origine (question indépendante).



b. Donner les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Exercice 3 - Une primitive et une ipp.








1. Déterminer "à vue" une primitive de la fonction $x \mapsto x \cos(x^2)$.





2. Soit $f : x \mapsto x^3 \cos(x^2)$. Déterminer une primitive de f en écrivant $f(x) = x^2 \times x \cos(x^2)$ et à l'aide d'une intégration par partie.

Exercice 4 - Deux calculs de $\cos \frac{\pi}{12}$.

-  1. a. Calculer $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.
-  b. En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$.
2. Soit $z = \frac{6-6\sqrt{3}i}{4-4i}$.
-  a. Mettre z sous forme algébrique.
-  b. Mettre z sous forme exponentielle-trigonométrique.
-  c. En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 5 - Une équation différentielle d'ordre 1.




-  1. Résoudre l'équation différentielle
- $$y'(x) - 4y(x) = x + e^{-x}$$
-  2. Déterminer les solutions qui vérifient de plus $y(0) = 1$.

Exercice 6 - Une équation différentielle d'ordre 2.

-  Résoudre l'équation différentielle
- $$y''(x) + 4y(x) = \cos 2x - \sin 2x$$

On pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto Ax \cos 2x + Bx \sin 2x$.

Exercice 7 - Des lieux géométriques.

1. On s'intéresse aux solutions de l'équation $|z - i| = |z - 1 + i|$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
-  a. Proposer une solution géométrique en introduisant des points bien choisis.
-  b. On cherche z sous la forme $z = x + iy$. Retrouver l'ensemble des solutions par une équation liant x et y .
-  2. Décrire l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $|(1 + i)z - 3| = 1$.