

DST 7

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Exploiter une décomposition.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 + x - 10}{(x-3)(x^2+1)}$.

1. Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 5X^3 + 9X^2 + X - 10$ par $(X-3)(X^2+1)$
2. Donner la décomposition en éléments simples de f .
3. Montrer que f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, et décrire la position relative de f par rapport à son asymptote.

Correction :

1. Il faut d'abord développer le diviseur : $(X-3)(X^2+1) = X^3 - 3X^2 + X - 3$. Après calculs :

$$X^4 - 5X^3 + 9X^2 + X - 10 = (X^3 - 3X^2 + X - 3)(X-2) + 2X^2 + 6X - 16$$

2. D'après la question précédente :

$$\forall x \neq 3 : f(x) = x - 2 + \frac{2x^2 + 6x - 16}{(x-3)(x^2+1)}.$$

On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\frac{2x^2 + 6x - 16}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{a}{x-3} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

On trouve avec la méthode usuelle : $a = 2$. On évalue en 0, on trouve : $c = 6$. Pour b , on peut évaluer en un autre point. Je préfère multiplier, et faire tendre x vers $+\infty$. L'analyse des limites donne : $2 = 2 + b$ et donc $b = 0$. Finalement :

$$f(x) = x - 2 + \frac{2}{x-3} + \frac{6}{x^2+1}.$$

3. D'après la question précédente :

$$f(x) = x - 2 + o(1),$$

donc la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, d'équation $y = x - 2$. De plus, toujours avec la question précédente :

$$f(x) - (x-2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x} > 0,$$

ce qui prouve que la courbe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2 - Une analyse asymptotique. Soit la fonction $f : x \mapsto x \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .

- Montrer que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, et donner son équation.
- Préciser la position relative de la courbe de f par rapport à cette asymptote.

Correction :

- On résout : $\frac{2x+1}{x} > 0$. Un simple tableau de signe donne : $D_f =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[$.
- On remarque que : $f(x) = x \ln(2 + \frac{1}{x}) = x \ln(2(1 + \frac{1}{2x})) = x(\ln(2) + \ln(1 + \frac{1}{2x}))$. Or on a en 0 le DL :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2),$$

d'où avec $u = \frac{1}{2x}$, on a en $+\infty$:

$$f(x) = x \ln(2) + x(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = x \ln(2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(\frac{1}{x}),$$

donc la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, d'équation $y = \ln(2)x + \frac{1}{2}$.

- On a d'après la question précédente :

$$f(x) - (\ln(2)x + \frac{1}{2}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{8x} < 0,$$

ce qui prouve que la courbe de f est au-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 - Une étude en 0. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(e^x-1)^2}{\sin(x^2)+x^3}$. On admet que la fonction est définie sur $]0, +\infty[$.

- Montrer que f se prolonge en une fonction continue en 0, et préciser la valeur en 0. On notera encore f la fonction prolongée.
- Montrer que f admet un DL à l'ordre 1 en 0, que l'on calculera.
- Montrer que f est dérivable, donner la valeur de la dérivée en 0, et donner l'équation de la tangente à l'origine.
- Donner la position relative de la fonction f et de sa tangente à l'origine.
- (question indépendante) Donner (en justifiant) un équivalent simple de la fonction f en $+\infty$.

Correction :

Exercice 4 - Deux exercices indépendants de polynômes.

- Décomposer en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 2$. Dans chaque cas, dire si le polynôme est scindé.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit le polynôme $P = (2X - 1)^{2n+1} - 1$.
 - Vérifier que 1 est racine de P , et donner sa multiplicité.
 - Donner le coefficient dominant et le coefficient constant de P .
 - Donner les autres racines complexes de P . On les exprimera sous la forme $re^{i\theta}$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$.
 - Calculer $\prod_{k=1}^{2n} e^{i \frac{k\pi}{2n+1}}$.
 - On rappelle que pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ scindé, le produit de ses racines vaut $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{2n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1})$.
 - Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, exprimer $\cos(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1})$ en fonction de $\cos(\frac{k\pi}{2n+1})$. A l'aide du changement d'indice $p = 2n+1-k$, en déduire :

$$\prod_{k=n+1}^{2n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1}) = (-1)^n \prod_{k=1}^n \cos(\frac{k\pi}{2n+1}).$$

g. Dédurre des questions précédentes la valeur de $\prod_{k=1}^n \cos(\frac{k\pi}{2n+1})$.

Correction :

1. On cherche des racines évidentes. On constate que $P(-1) = 0$. Avant de factoriser par $X + 1$, on cherche sa multiplicité. On calcule : $P' = 4X^3 + 6X^2 + 6X + 4$. On a alors : $P'(-1) = 0$, donc -1 est racine au moins double. On peut vérifier (ou pas) qu'elle n'est pas racine triple. On peut factoriser par $(X + 1)^2$. Après calculs (par exemple une division euclidienne) :

$$P = (X + 1)^2(X^2 + 2).$$

Puisque $(X + 1)^2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$, il s'agit de la décomposition attendue sur $\mathbb{R}$, et il n'est pas scindé, puisqu'il a deux racines (avec multiplicité), alors qu'il est de degré 4.

Sur $\mathbb{C}$, il est scindé d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, et on le décompose en factorisant $(X + 1)^2$ sur $\mathbb{C}$:

$$P = (X + 1)^2(X + \sqrt{2}i)(X - \sqrt{2}i)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit le polynôme $P = (2X - 1)^{2n+1} - 1$.

- a. Il est direct que $P(1) = 0$, de plus $P'(X) = 2 \times (2n + 1) \neq 0$. Le nombre 1 est donc de multiplicité 1 (racine simple).
- b. En utilisant le binôme de Newton : le coefficient dominant vaut $2^{2n+1} = 2 \times 4^n$, et le coefficient constant vaut $(-1)^{2n+1} - 1 = -2$.
- c. On résout, en utilisant le cours sur les racines complexes de l'unité :

$$P(z) = 0 \iff (2z - 1)^{2n+1} = 1 \iff 2z - 1 = e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}, \text{ avec } k \in \{0, \dots, 2n\}.$$

Or, en utilisant l'angle moitié :

$$2z - 1 = e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} \iff z = \frac{1}{2}(e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} + 1) = \frac{1}{2} \times e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}(e^{i\frac{k\pi}{2n+1}} + e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}}) = \cos(\frac{k\pi}{2n+1})e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}.$$

- d. Question assez facile. On a :

$$\prod_{k=1}^{2n} e^{i\frac{k\pi}{2n+1}} = e^{i\sum_{k=1}^{2n} \frac{k\pi}{2n+1}}.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{\pi}{2n+1} \times \frac{2n(2n+1)}{2} = n\pi.$$

Ainsi,

$$\prod_{k=1}^{2n} e^{i\frac{k\pi}{2n+1}} = e^{in\pi} = (-1)^n.$$

- e. On applique le rappel au produit des $2n + 1$ racines de P (qui est bien scindé sur $\mathbb{C}$) :

$$1 \times \prod_{k=1}^{2n} (\cos(\frac{k\pi}{2n+1})e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}) = (-1)^{2n+1} \frac{-2}{2 \times 4^n} = \frac{1}{4^n}$$

et donc en utilisant la question précédente :

$$\prod_{k=1}^{2n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{(-1)^n}{4^n}.$$

- f. On a :

$$\cos(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}) = \cos(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}) = -\cos(\frac{k\pi}{2n+1}).$$

On déduit

$$\prod_{k=n+1}^{2n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1}) = \prod_{p=1}^n \cos(\frac{(2n+1-p)\pi}{2n+1}) = \prod_{p=1}^n (-\cos(\frac{p\pi}{2n+1})) = (-1)^n \prod_{k=1}^n \cos(\frac{k\pi}{2n+1}).$$

g. En reliant toutes les questions précédentes, on trouve :

$$\left(\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = \frac{1}{4^n} \iff \prod_{p=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \pm \frac{1}{2^n}.$$

Or on a $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$, et donc $\cos(\frac{k\pi}{2n+1}) > 0$, d'où :

$$\prod_{p=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2^n}.$$

Exercice 5 - Deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

Soit les sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x - y - z + 3t = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, 2, 5, 4), (3, 3, 2, 1), (5, 4, -1, -2))$$

1. Donner une base, et la dimension de F .
2. Donner une base, et la dimension de G .
3. A-t-on $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$? On justifiera le résultat.

Correction :

1. Avec les méthodes usuelles :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -3y - 3z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - z - t = -\frac{4}{3}t \\ y = -z + \frac{1}{3}t \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \left(-\frac{4}{3}t, -z + \frac{1}{3}t, z, t\right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ z(0, -1, 1, 0) + t\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect}\left((0, -1, 1, 0); \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right)\right) \\ &= \text{Vect}\left((0, -1, 1, 0); (-4, 1, 0, 3)\right) \end{aligned}$$

Cette famille est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires, donc c'est une base de F , ainsi $\dim(F) = 2$.

2. On peut vérifier si la famille est libre, ou bien procéder selon l'algorithme de la base extraite, ce qui revient au même. En notant (e_1, e_2, e_3) les vecteurs, dans les deux cas, on trouve que

$$e_3 = 2e_2 - e_1.$$

Ainsi la famille est liée, et on a :

$$G = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{Vect}(e_1, e_2).$$

Comme la famille (e_1, e_2) est libre, c'est une base de G , et donc $\dim(G) = 2$.

3. On a

$$\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = \dim(\mathbb{R}^4),$$

il suffit donc de montrer que $F \cap G = \{0\}$. Soit $u \in F \cap G$, il vérifie :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, u = \lambda e_1 + \mu e_2 = (\lambda + 3\mu, 2\lambda + 3\mu, 5\lambda + 2\mu, 4\lambda + \mu)$$

On peut exploiter les équations de F :

$$\begin{cases} 12\lambda + 9\mu = 0 \\ 7\lambda + 4\mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0$$

Cela prouve $F \cap G = \{0\}$, et donc $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

On pouvait aussi accoler les bases de F et G , et vérifier que cette famille de quatre vecteurs est libre, en échelonnant la matrice associée.