DST 6
Corrigé

Exercice 1 - Connaître et appliquer son cours.

1. **a.** Voir cours.
   b. Voir cours.
   c. Voir cours.
2. Voir cours pour la méthode. On trouve
$$X^4 + 3X^3 - 2X + 1 = (X^2 - 2)(X^2 + 3X + 2) + 4X + 5.$$
3. On utilise la mise sous forme canonique
$$\begin{aligned} & x^2 - 3x + y^2 + 4y = 0 \\ \iff & (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (y+2)^2 - 4 = 0 \\ \iff & (x - \frac{3}{2})^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{4} \end{aligned}$$
On reconnait l'équation du cercle de centre $(\frac{3}{2}, -2)$ et de rayon $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$.

Exercice 2 - Calcul de puissance par la division euclidienne. Soit
$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Un calcul direct donne
$$A^2 = \begin{pmatrix} 36 & -7 & -13 \\ 33 & 2 & -19 \\ 27 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$$
2. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$aI_3 + bA + cA^2 = 0.$$
Alors on a en regardant simplement les trois premières lignes :
$$\begin{cases} a - 7b + 36c = 0 \\ b - 7c = 0 \\ 2b - 13c = 0 \end{cases}$$
Les deux dernières lignes ce ce système fournissent directement $b = c = 0$ et donc avec la première ligne du système $a = 0$.
Cela prouve que la famille (I_3, A, A^2) est libre.
Notez qu'on a pas besoin d'écrire les 9 équations à 3 inconnues : il suffit que trois d'entres elles conduisent à la solution nulle pour conclure !
3. Par définition, la famille (I_3, A, A^2) est génératrice de $\text{Vect}(I_2, A, A^2)$. De plus, elle est libre, donc c'est une base de $\text{Vect}(I_2, A, A^2)$. Ainsi, comme elle comporte trois éléments, on a
$$\dim(\text{Vect}(I_2, A, A^2)) = 3.$$

4. Un calcul direct donne
$$P(A) = A^3 + 10A^2 + 33A + 36I_3 = 0.$$

5. D'après la question précédente on a
$$A^3 = -10A^2 - 33A - 36I_3$$
ce qui prouve que A^3 est dans $\mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.

6. On a en cherchant à isoler I_3 dans l'équation $P(A) = 0$:
$$P(A) = 0 \iff \frac{1}{36}(-A^3 - 10A^2 - 33A) = I_3 \iff A\left(-\frac{1}{36}(A^2 + 10A + 33I_3)\right) = I_3.$$
Cela prouve que A est inversible, et que $A^{-1} = -\frac{1}{36}(A^2 + 10A + 33I_3)$

7. On s'intéresse aux racines du polyôme P'.

a. On a
$$P' = 3X^2 + 20X + 33$$
Le discriminant est $\Delta = 20^2 - 4 \times 3 \times 33 = 400 - 4 \times 99 = 400 - 396 = 4$. Ainsi P' a deux racines réelles :
$$\lambda_1 = \frac{-20-2}{2 \times 3} = -\frac{11}{3} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-20+2}{2 \times 3} = -3.$$

b. Il est plus naturel de vérifier si la racine entière de P' convient. On a
$$P'(-3) = -27 + 90 - 99 + 36 = 0.$$

c. On déduit que -3 est racine au moins double de P, et donc que P est divisible par $(X+3)^2$.

d. Si $\lambda_1 = -\frac{11}{3}$ était racine de P en plus d'être racine de P', ce serait aussi une racine au moins double. Le nombre de racines (comptées avec multplicité) serait supérieur ou égal à $2 + 2 = 4$, ce qui est impossible pour un polynôme de degré 3.

e. D'après les questions précédentes, on a
$$P = (X+3)^2 Q \quad \text{avec} \quad \deg(Q) = 1,$$
et en cherchant Q sous la forme $Q = (aX + b)$, on se ramène à
$$X^3 + 10X^2 + 33X + 36 = (X+3)^2(aX+b)$$
Il est direct en regardant les coefficients dominants et constant que $a = 1$ et $b = 4$, ainsi
$$P = (X+3)^2(X+4)$$
C'est la décomposition en facteurs irreductible, et on constate que P est scindé puisqu'il a trois racines comptées avec multiplicité.

8. La division eucidienne demandée s'écrit
$$X^n = (x+3)^2(X+4)Q + R \quad \text{avec } \deg(R) \leqslant 2.$$
On cherche R sous la forme $\alpha + \beta X + \gamma X^2$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ (qui vont dépendre de n, a priori. Comme on ne demande pas de trouver Q, on va évaluer en les racines du diviseur, à savoir -3 et -4. On obtient :
$$(-3)^n = \alpha - 3\beta + 9\gamma \quad \text{et} \quad (-4)^n = \alpha - 4\beta + 16\gamma.$$
Il manque une troisième équation, or -3 est racine double du diviseur, donc on dérive l'identité :
$$nX^{n-1} = P'Q + PQ' + R'$$
et on évalue à nouveau en -3 :
$$n(-3)^{n-1} = R'(-3) = \beta - 6\gamma.$$
On est amené à résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha - 3\beta + 9\gamma = (-3)^n \\ \alpha - 4\beta + 16\gamma = (-4)^n \\ \beta - 6\gamma = n(-3)^{n-1} \end{array}\right.$$
Après résolution par pivot, on trouve :
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = (12n+24)(-3)^{n-1} + 9(-4)^n \\ \beta = (7n+18)(-3)^{n-1} + 6(-4)^n \\ \gamma = (n+3)(-3)^{n-1} + (-4)^n \end{array}\right.$$

9. Renotons α_n, β_n et γ_n les trois réels trouvés à la questions précédentes, ils vérifient

$$\forall n \geqslant 3, \quad X^n = PQ + \alpha_n + \beta_n X + \gamma_n X^2.$$

On évalue cette identité en A, en utilisant que $P(A) = 0$:

$$A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n A + \gamma_n A^2$$

ce qui est bien l'identité demandée.
Attention à bien transformer le terme constant α_n d'un polynôme en $\alpha_n I_3$ lorsqu'on l'évalue en une matrice !

10. On trouve avec $n = 3$, après un peu de calcul élémentaire :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_3 = -36 \\ \beta_3 = -33 \\ \gamma_3 = -10 \end{array}\right. ,$$

On retrouve bien que

$$A^3 = -10A^2 - 33A - 36I_3,$$

voir **Q5**.

11. On met ce problème sous forme matricielle en posant $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

On a alors

$$\forall n \geqslant 0, \quad X_{n+1} = AX_n$$

et donc par récurrence directe :

$$X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n X_0 = \alpha_n X_0 + \beta_n A X_0 + \gamma_n A^2 X_0$$

Rappeler-vous que pour une matrice M, la matrice colonne MX_0 n'est rien d'autre que la deuxième colonne de M ! Ainsi, on a

$$A^n X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_n \\ -2\beta_n \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7\gamma_n \\ 2\gamma_n \\ -7\gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_n - 7\gamma_n \\ \alpha_n - 2\beta_n + 2\gamma_n \\ \beta_n - 7\gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)^n - (-4)^n \\ 2(-3)^n - (-4)^n \\ (-3)^n - (-4)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 3 - Une équation sur un polynôme. Pour $q \in \mathbb{N}$, on considère

$$E_q = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid (X-2)P' = qP\}$$

1. Il est direct que le polynôme nul vérifie

$$(X-2)0' = q \times 0.$$

2. On sait déjà que E_q contient le polynôme nul. Montrons que E_q est stable par combinaison linéaire. Soient P_1 et P_2 dans E_q, ainsi que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$(X-2)(\lambda P_1 + \mu P_2)' = (X-2)(\lambda P_1' + \mu P_2') = \lambda(X-2)P_1' + \mu(X-2)P_2' = \lambda q P_1 + \mu q P_2 = q(\lambda P_1 + \mu P_2).$$

Cela prouve que $\lambda P_1 + \mu P_2 \in E_q$, et donc que E_q est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, en particulier c'est un espace vectoriel.

3. On a

$$P \in E_0 \iff (X-2)P' = 0 \iff P' = 0 \iff P \text{ est constant.}$$

Ainsi, $E_0 = \mathbb{R}_0[X]$, c'est un espace vectoriel de dimension 1.

4. On souhaite déterminer E_1 :

a. Soit P un polynôme de degré 0, c'est-à-dire un polynôme constant non nul. On a alors

$$(X-2)P' = 0 \neq 1 \times P.$$

Donc $P \notin E_1$.

b. Notons n le degré de P et a_n son coefficient dominant (qui est non nul). Alors on a

$$(X-2)P' = (X-2)\sum_{k=1}^{n} ka_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} ka_k X^k - 2\sum_{k=1}^{n} ka_k X^{k-1},$$

en particulier ce polynôme est de degré n, et a pour coefficient dominant na_n. (Remarque : on pouvait le dire directement sans écrire le polynôme formellement).
Ainsi en identifiant les coefficients en X^n :

$$(X-2)P' = P \implies na_n = a_n \iff n = 1 \quad \text{car} \quad a_n \neq 0.$$

Ainsi, si $P \in E_1$, alors $n = \deg(P) = 1$. Attention, ce n'est qu'une implication !

c. Soit $P \in E_1$, alors $\deg(P) = 1$, donc on le cherche sous la forme $P = aX + b$. On a alors

$$(X-2)P' = P \iff a(X-2) = aX + b \iff b = -2a \iff P = a(X-2),\ a \in \mathbb{R}.$$

Cela prouve que $E_1 = \mathrm{Vect}(X-2)$.

5. Le but des questions suivantes est de déterminer E_q pour $q \geqslant 2$.

a. Par un raisonnement analogue à la question **4b**, on trouve que si $n = \deg(P)$ et si a_n est le coefficient dominant de P, alors

$$na_n = qa_n \iff n = q.$$

b. En évaluant l'identité $(X-2)P' = P$ en 2, on obtient $0 = P(2)$, et donc 2 est racine de P.

c. **(i)** Soit $k \in \mathbb{N}$, on applique la formule de Leibniz pour dériver le produit $(X-2)P'$:

$$((X-2)P')^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (X-2)^{(j)} (P')^{(k-j)}.$$

Or on a

$$\forall j \geqslant 2, \quad (X-2)^{(j)} = 0,$$

ainsi la somme ne comporte que deux termes non nuls :

$$((X-2)P')^{(k)} = (X-2)(P')^k + \binom{k}{1}(P')^{(k-1)} = (X-2)P^{(k+1)} + kP^{(k)}.$$

Finalement, on a en dérivant k fois la formule $(X-2)P' = P$ que

$$P \in E_q \implies (X-2)P^{(k+1)} + kP^{(k)} = qP^{(k)}.$$

Remarque : on pouvait aussi montrer cette formule par récurrence sur k.

(ii) On le montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. L'initialisation est bien vérifiée par hypothèse sur α puisque $P^{(0)}(\alpha) = P(\alpha) = 0$.
Montrons l'hérédité : soit $k \in [\![0\,, q-2]\!]$ tel que $P^{(k)}(\alpha) = 0$. Alors on d'après la question précédente, en évaluant en α, que

$$(\alpha - 2)P^{(k+1)}(\alpha) = 0$$

et donc $P^{(k+1)}(\alpha) = 0$ car $\alpha \neq 2$ par hypothèse. On déduit la propriété par hérédité.

(iii) Puisque q est le degré du polynôme P, la formule de Taylor polynomiale en α est exacte à l'ordre q :

$$P = \sum_{k=0}^{q} \frac{P^{(k)(\alpha)}}{k!}(X-\alpha)^k,$$

et donc d'après la questions précédente, $P = 0$, ce qui est une contradiction car on a supposé P non nul.

d. Le polynôme P n'a qu'une seule racine sur $\mathbb{C}$: 2. Ainsi, puisque P est scindé sur $\mathbb{C}$, sa décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ est

$$P = a(X-2)^q, \quad \text{avec } a \in \mathbb{C}.$$

Or $P \in \mathbb{R}[X]$, donc $a \in \mathbb{R}$, et finalement

$$E_q = \mathrm{Vect}((X-2)^q).$$

Exercice 4 - Factorisation avec un paramètre. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on introduit le polynôme

$$P = X^4 + \lambda X^3 + 4(\lambda-2)X^2 + 4\lambda X + 16$$

1. Il est direct que $P(-2) = P'(-2) = 0$.
2. On déduit que -2 est racine de multiplicité au moins 2 de P, et donc que le polynôme $(X+2)^2$ divise P.
3. On sait d'après la question précédente que $(X+2)^2 = X^2+4X+4$ divise P, ainsi, le reste dans la division euclidienne de P par X^2+4X+4 est nul. Il est peu pratique de réaliser des divisions avec des paramètres, il vaut mieux chercher un polynôme Q tel que

$$P = (X^2+4X+4)Q.$$

Or, Q est de degré deux, donc on le cherche sous la forme $Q = aX^2+bX+c$, c'est-à-dire

$$X^4 + \lambda X^3 + 4(\lambda-2)X^2 + 4\lambda X + 16 = (X^2+4X+4)(aX^2+bX+c).$$

On identifie facilement les coefficients extrémaux en développant de tête les termes de degré 4 et de degré 0 : $a = 1$ et $c = 4$. Pour le dernier coefficient, en identifiant le terme en X^3, on obtient

$$\lambda = 4 + b \iff b = \lambda - 4.$$

Finalement :

$$X^4 + \lambda X^3 + 4(\lambda-2)X^2 + 4\lambda X + 16 = (X^2+4X+4)(X^2+(\lambda-4)X+4),$$

ce qui est la division euclidienne recherchée.

4. On sait déjà que $X^2+4X+4 = (X+2)^2$. On cherche à factoriser $X^2+(\lambda-4)X+4$. Son discriminant vaut $\Delta = (\lambda-4)^2 - 16 = \lambda^2 - 8\lambda = \lambda(\lambda-8)$. Ainsi, on a

$$\Delta \geqslant 0 \iff \lambda \notin]0,8[.$$

Ainsi, on a une disjonction de cas :

- Si $\lambda \in]-\infty,0] \cup [8,+\infty[$, alors $X^2+(\lambda-4)X+4$ possède deux racines $\frac{4-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-8\lambda}}{2}$. On a alors

$$P = (X+2)^2\left(X - \frac{4-\lambda-\sqrt{\lambda^2-8\lambda}}{2}\right)\left(X - \frac{4-\lambda+\sqrt{\lambda^2-8\lambda}}{2}\right)$$

Il s'agit de la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$.

- Si $\lambda \in]0,8[$, le trinôme $(X^2+(\lambda-4)X+4)$ est irreductible sur $\mathbb{R}$, et la décomposition en facteurs irreductibles de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P = (X+2)^2(X^2+(\lambda-4)X+4).$$

La décomposition en facteurs irreductibles sur $\mathbb{C}$ se déduit en calculant les racines complexes du trinômes :

$$P = (X+2)^2\left(X - \frac{4-\lambda-i\sqrt{|\lambda^2-8\lambda|}}{2}\right)\left(X - \frac{4-\lambda+i\sqrt{|\lambda^2-8\lambda|}}{2}\right)$$

5. D'après la question précédente, P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si on est dans le deuxième cas, c'est-à-dire lorsque $\lambda \in]-\infty,0] \cup [8,+\infty[$. En revanche, il est toujours scindé sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Exercice 5 - Etude asymptotique. Il est direct que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

on va déterminer un développement asymptotique de cette fonction. Comme souvent sur ce type de question, on effectue un développement par rapport à la variable $\frac{1}{x}$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = \frac{1}{x^2}(1+\frac{1}{x^4})^{-1/2},$$

or

$$(1+u) \underset{u\to}{=} 1+\alpha u + o(u),$$

d'où puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$:

$$(1+\frac{1}{x^4})^{-1/2} \underset{u\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2x^4} + o(\frac{1}{x^4}).$$

A ce stade, on ne sait pas si faire un DL à cet ordre suffit pour l'objectif, qui est d'écrire $f(x) = ax+b+o(1)$ (avec le terme $o(1)$ explicite afin d'avoir la position relative), mais le terme suivant de $(1+\frac{1}{x^4})^{-1/2}$ étant d'ordre de grandeur $\frac{1}{x^8}$, on se doute qu'il ne jouera pas. Continuons.

On a donc

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^6} + o(\frac{1}{x^6})$$

et par produit :

$$\frac{x^3-2x^2+1}{\sqrt{1+x^4}} = (x^3-2x^2+1)(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^6} + o(\frac{1}{x^6})) = x-2+\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$

On a aussi avec le DL de l'exponentielle en 0 :

$$e^{\frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

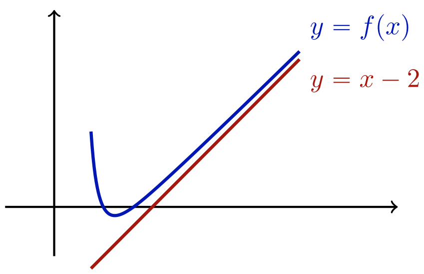
et par produit :

$$f(x) = (x-2+\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2}))(1+\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})) = x-2+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

Cela prouve que la courbe représentative de f admet pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ la droite d'équation $y = x-2$. De plus, on a

$$f(x)-(x-2) = \frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$$

ce qui prouve que $f(x)-(x-2)$ est du signe de $x-2$ au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire positif. Ainsi, la courbe est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.



Exercice 6 - Autour d'un triangle. Soit ABC un triangle tel que $A(1,3)$, $B(5,7)$ et $C(2,8)$.

1. Donner une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Donner une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[BC]$.
3. Donner les coordonnées de l'intersection de ces deux médiatrices. On notera K ce point.
4. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.
5. Déterminer une équation cartésienne de la médiane relative au segment $[A,B]$.
6. Déterminer la distance du point c à la droite (AB).