

DST 6

Exercice 1 - Une EDL1 (Issu de Banque PT, épreuve C, 2024). On étudie l'équation différentielle :

$$(E) : \quad \forall x \in]0, \pi[: y'(x) + 2 \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

- Résoudre l'équation homogène associée.
- Résoudre l'équation différentielle (E) .
- (Une primitive qui pourrait servir)
 - Pour $x \in [0, \pi[$, on pose $u = \tan(\frac{x}{2})$. Montrer : $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$.
 - En posant $u = \tan(\frac{x}{2})$, déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ sur $]0, \pi[$.
- On considère l'équation différentielle

$$(E') : \quad \forall x \in]0, \pi[: y''(x) + y(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

- Résoudre l'équation homogène associée à (E') .
- On cherche une solution de (E') sous la forme $y : x \mapsto \sin(x)z(x)$, où z est une fonction deux fois dérivable. Montrer que y est solution de (E') si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle (E) .
- En déduire les solutions de (E') .

Correction :

- On introduit $a : x \mapsto 2 \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Alors les solutions de l'équation homogène sont

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

où $A = \int a$ est une primitive de a . On la calcule, en reconnaissant une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$:

$$A(x) = 2 \ln |\sin(x)| = 2 \ln(\sin(x)) \quad \text{car } \sin(x) > 0 \text{ sur }]0, \pi[.$$

Ainsi :

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto \lambda e^{-2 \ln(\sin(x))}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \frac{\lambda}{\sin(x)^2}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On applique la méthode de la variation de la constante, en cherchant y_p sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x) \times \frac{1}{\sin(x)^2}$. On injecte dans l'équation différentielle, et on a après calculs (voir cours) que y_p est solution si et seulement si :

$$\lambda'(x) \times \frac{1}{\sin(x)^2} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2} \iff \lambda'(x) = \cos(x).$$

On prend donc $\lambda(x) = \sin(x)$, et on obtient une solution particulière : $y_p : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$.

On conclut par superposition :

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \frac{\lambda}{\sin(x)} + \frac{1}{\sin(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- (Une primitive qui pourrait servir)
 - Elémentaire, mais technique. On peut partir de la réponse, c'est plus simple. On propose ci-dessous un calcul qui fonctionne dans le cas où la réponse ne serait pas donnée :

$$\sin(x) = \sin(2 \times \frac{x}{2}) = 2 \sin(\frac{x}{2}) \times \cos(\frac{x}{2}) = 2 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} \times \cos(\frac{x}{2})^2,$$

Or connaît la formule : $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, d'où :

$$\sin(x) = 2 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} \times \frac{1}{1 + \tan(\frac{x}{2})^2} = \frac{2u}{1 + u^2}$$

- b. On pose $u = \tan(\frac{x}{2})$, c'est-à-dire qu'on réalise le changement de variable associé à la fonction $\varphi : t \mapsto \tan(\frac{t}{2})$, qui est bien C^1 sur $]0, \pi[$. On a alors :

$$\frac{du}{dt} = \varphi'(t) = \frac{1}{2} \times (1 + \tan(\frac{t}{2})^2) \iff dt = \frac{2}{1+u^2} du.$$

On effectue le changement de variable :

$$\forall x \in]0, \pi[: \int^x \frac{1}{\sin(t)} dt = \int^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1+u^2}{2u} \times \frac{2}{1+u^2} du = \int^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{u} du = \ln |\tan(\frac{x}{2})| = \ln(\tan(\frac{x}{2})) \quad \text{sur }]0, \pi[$$

4. On considère l'équation différentielle

$$(E') : \quad \forall x \in]0, \pi[: y''(x) + y(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

- a. Voir cours, l'ensemble des solutions de l'équation est homogène est :

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- b. Soit $y : x \mapsto \sin(x)z(x)$, où z est une fonction deux fois dérivables. Alors on a :

$$y'(x) = \cos(x)z(x) + \sin(x)z'(x) \quad \text{et} \quad y''(x) = -\sin(x)z(x) + 2\cos(x)z'(x) + \sin(x)z''(x)$$

On injecte : y est solution de (E') si et seulement si :

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} \iff -\sin(x)z(x) + 2\cos(x)z'(x) + \sin(x)z''(x) + \sin(x)z(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \\ &\iff \sin(x)z''(x) + 2\cos(x)z'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \\ &\iff z''(x) + 2\frac{\cos(x)}{\sin(x)}z'(x) = \frac{\cos x}{(\sin x)^2} \\ &\iff z' \text{ est solution de } (E) \end{aligned}$$

- c. On a déjà les solutions de l'équation homogène. Pour trouver une solution particulière, on utilise la question précédente. Une solution particulière de (E) est $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ (autant prendre $\lambda = 0$, et ne pas mettre le terme $\frac{\lambda}{\sin(x)^2}$). Il reste alors à résoudre $z' = \frac{1}{\sin(x)}$, donc à trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$, ce qui a été fait ci-dessus. On prend donc :

$$z : x \mapsto \ln(\tan(\frac{x}{2})), \quad \text{et} \quad y_p : x \mapsto \sin(x) \ln(\tan(\frac{x}{2})).$$

Ce qui précède montre que y_p est bien une solution particulière de (E') .

On conclut par superposition :

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) + \sin(x) \ln(\tan(\frac{x}{2})), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice 2 - En vrac.

1. a. Résoudre l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R} : y'' - 4y = 8e^{2x} + 4x^2.$$

- b. Déterminer les solutions qui vérifient de plus : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

2. a. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+6x+11}$, en précisant l'ensemble de définition

- b. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t}+6e^t+11} dt$.

Correction :

1. a. On commence par considérer l'équation homogène : $y'' - y = 0$. L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 1 = 0$, dont les racines sont ± 1 . Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On cherche maintenant une solution particulière, en décomposant le second membre. On cherche y_{p_1} , une solution particulière de : $(E_1) : y'' - 4y = 8e^{2x}$. Comme le second membre est lui-même solution homogène, on est dans un cas résonant, et on cherche y_{p_1} sous la forme $y_{p_1} : x \mapsto Cxe^{2x}$. On calcule :

$$y'_{p_1}(x) = C(2x + 1)e^{2x} \quad \text{et} \quad y''_{p_1}(x) = C(4x + 4)e^{2x}$$

Alors : y_{p_1} est solution de (E_1) si et seulement si :

$$C(4x + 4)e^{2x} - 4Cxe^{2x} = 8e^{2x} \iff 4C = 8 \iff C = 2$$

Cela prouve que $y_{p_1} : x \mapsto 2xe^{2x}$ est solution de (E_1) .

De même : on cherche y_{p_2} , une solution particulière de : $(E_2) : y'' - 4y = 4x^2$. Comme le second membre est un polynôme, on cherche y_{p_2} sous la forme $y_{p_2} : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Alors : y_{p_2} est solution de (E_2) si et seulement si :

$$2a - 4(ax^2 + bx + c) = 4x^2 \iff \begin{cases} -4a = 4 \\ -b = 0 \\ 2a - 4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Cela prouve que $y_{p_2} : x \mapsto -x^2 - \frac{1}{2}$ est solution de (E_1) .

On conclut par superposition : l'ensemble des solutions de l'équation initiale est

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x} + 2xe^{2x} - x^2 - \frac{1}{2}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

- b. On a, en exploitant la forme de la solution trouvée :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B - \frac{1}{2} = 0 \\ 2A - 2B + 2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = \frac{1}{2} \\ A - B = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, le problème admet une unique solution :

$$x \mapsto \frac{1}{2}e^{-2x} + 2xe^{2x} - x^2 - \frac{1}{2}.$$

2. a. Le dénominateur a un discriminant négatif, la fonction est donc définie sur $\mathbb{R}$, et les primitives sont définies sur $\mathbb{R}$ aussi. Notons F une primitive cherchée. On applique le cours, en commençant par la forme canonique :

$$F(x) = \int^x \frac{1}{t^2 + 6t + 11} dt = \int^x \frac{1}{(t+3)^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \int^x \frac{1}{(\frac{t+3}{\sqrt{2}})^2 + 1} dt.$$

On effectue le changement de variable affine $u = \frac{t+3}{\sqrt{2}}$, et on trouve :

$$F(x) = \frac{1}{2} \int^{\frac{x+3}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u^2 + 1} \sqrt{2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right).$$

- b. On effectue le changement de variable $u = e^t$, qui donne $du = e^t dt$:

$$I = \int_1^e \frac{1}{u^2 + 6u + 11} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{e+3}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+3}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

Exercice 3 - Dérivabilité

Soit $f : t \mapsto \begin{cases} t^2 \ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

- 1) Justifier que f est continue sur $[0, +\infty[$.
- 2) Montrer que $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$. On donnera la valeur de $f'(0)$.
- 3) La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?
- 4) a) Déterminer f' et f'' sur $]0, 1]$.
b) Etudier les variations de f' sur $[0, 1]$
c) En déduire que : $\forall t \in [0, 1], -2e^{-3/2} \leq f'(t) \leq 1$.
- 5) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], -2e^{-3/2}x \leq f(x) \leq 0$.

Exercice 4 – Espace vectoriel

Soient $e_1 = (1, 2, 3, 4)$, $e_2 = (1, 3, 5, 7)$, $e_3 = (-1, 1, 2, -5)$ et $e_4 = (1, 6, 10, 6)$.

Soit $e_5 = (6, 11, 17, 31)$.

Soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -8x + 17y - 10z + t = 0\}$.

- 1) Montrer que G est un espace vectoriel et donner une base de G .
- 2) Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) n'est pas une base de F et déterminer une base de F .
- 3) Donner une ou des équations caractéristiques de F .
- 4) Montrer que e_5 est un élément de F .
- 5) Donner un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$. On demande une justification rigoureuse.
- 6) Montrer que : $F = G$
- 7) Déterminer $\text{Vect}(e_1, e_2) \cap \text{Vect}(e_3, e_4)$