DST 6

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^3$. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Dans cet exercice, les éléments de $\mathbb{R}^3$ sont notés en colonne. Soit l'application $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u : X \mapsto MX$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, expliciter $u(X)$.
2. Déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
3. La fonction u est-elle un automorphisme ?
4. Pour $X \in \mathbb{R}^3$, calculer $u \circ u(X)$. Qu'en déduire pour u ?
5. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u - \mathrm{Id})$. En déduire une base de $\ker(u - \mathrm{Id})$.
6. Justifier que $E = \ker(u) \bigoplus \ker(u - \mathrm{Id})$. En déduire qu'il existe une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que tout $X \in \mathbb{R}^3$ se décompose en $X = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$, avec de plus $u(X) = \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$.

Correction :

1. La fonction u est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, vérifions sa linéarité : soient $(X, Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ainsi que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$u(\lambda X + \mu Y) = M(\lambda X + \mu Y) = \lambda MX + \mu MY = \lambda u(X) + \mu u(Y)$$
ce qui prouve que u est linéaire. Ainsi, u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
On explicite u :
$$u(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 4z \\ 4y + 12z \\ -y - 3z \end{pmatrix}$$
2. Déterminons $\ker(u)$: on résout
$$u(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x + y + 4z = 0 \\ 4y + 12z = 0 \\ -y - 3z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ y = -3z \end{array} \right.$$
après un pivot rapide non détaillée.
Ainsi,
$$\ker(u) = \{ \begin{pmatrix} -z \\ -3z \\ z \end{pmatrix}), \ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix})$$
Comme le vecteur non nul $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une famille libre, c'est une base de $\ker(u)$, et $\dim(\ker(u)) = 1$.

Par le théorème du rang :
$$\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(u)) = 3 - 1 = 2.$$
Ainsi, il suffit de deux vecteurs libres de $\mathrm{Im}(u)$ pour en avoir une base. Or :
$$u(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$$
Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une famille libre, et donc ils forment une base de $\mathrm{Im}(u)$.

3. On a $\ker(u) \neq \{0\}$, donc la fonction u n'est pas injective, et ce n'est pas automorphisme.

4. Après calculs (qui peuvent se faire en calculant simplement M^2), on trouve $u \circ u(X) = u(X)$. Ainsi, $u \circ u = u$, et donc u est un projecteur.

5. On peut citer le cours en disant : puisque u est un projecteur, on a :
$$\forall X \in \mathrm{Im}(u) : u(X) = X \iff u(X) - X = 0 \iff (u - \mathrm{Id})(X) = 0 \iff X \in \ker(u - \mathrm{Id}),$$
ce qui prouve que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u - \mathrm{Id})$.
Il est normal de ne pas avoir en tête cette caractérisation de l'image, et d'en refaire la preuve. Procedons par double inclusion :

- Soit $Y \in \mathrm{Im}(u)$, alors il existe $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $Y = u(X)$. Alors
$$(u - \mathrm{Id})(Y) = u(Y) - Y = u(u(X)) - Y = u(X) - Y = 0$$
où on a utilisé $u \circ u = u$. Cela prouve que $Y \in \ker(u - \mathrm{Id})$, et donc $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u - \mathrm{Id})$.
- Réciproquement, soit $Y \in \ker(u - \mathrm{Id})$, alors $u(Y) - Y = 0$ et donc $Y = u(Y) \in \mathrm{Im}(u)$, donc $\ker(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Ainsi $\mathrm{Im}(u) = \ker(u - \mathrm{Id})$.

On déduit une base de $\ker(u - \mathrm{Id})$ avec la question **Q2** : une base de $\ker(u - \mathrm{Id})$ est $(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix})$.

6. On peut citer le cours : puisque u est un projecteur, on a $E = \ker(u) \bigoplus \mathrm{Im}(u)$, et donc d'après la question précédente, $E = \ker(u) \bigoplus \ker(u - \mathrm{Id})$.
Soit f_1 une base de $\ker(u)$ et (f_2, f_3) une base de $\ker(u - \mathrm{Id})$ (on peut prendre les vecteur explicitement trouvés ci-dessus). Alors, puisque $E = \ker(u) \bigoplus \ker(u - \mathrm{Id})$, la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, donc tout $X \in \mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique en $X = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$.
De plus,
$$\begin{cases} u(f_1) = 0 \quad \text{car } f_1 \in \ker(u) \\ u(f_2) = f_2 \quad \text{et} \quad u(f_3) = f_3 \text{ car } (f_2, f_3) \in \ker(u - \mathrm{Id})^2 \end{cases}$$
donc par linéarité :
$$u(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3) = \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3.$$

Exercice 2 - Algèbre linéaire : calcul d'un commutant et applications. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}$. Soit l'application $u : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ définie par $u : M \mapsto AM - MA$.

On se propose de déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ par deux approches très différentes.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. **a.** Déterminer par le calcul une base de $\ker(u)$, et donner sa dimension.

b. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$.

3. Nous allons retrouver les résultats de la question **Q2** avec très peu de calculs.

a. Calculer $u(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix})$ et $u(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix})$. En déduire : $\mathrm{rg}(u) \geqslant 2$.

b. Montrer que $\mathrm{Vect}(I_2, A) \subset \ker(u)$.

c. Qu'en déduire pour $\dim(\ker(u))$?

d. En déduire $\dim(\ker(u))$ et $\mathrm{rg}(u)$.

e. En déduire une base de $\ker(u)$.

f. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \in \ker(u)$. En déduire : $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists!(\lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^2\ :\ A^k = \lambda_k I_2 + \mu_k A$.

4. Dans cette question qui peut être traité indépendamment, nous allons calculer les puissances de A.

a. Calculer explicitement (λ_2, μ_2). En déduire un poynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.

b. Pour $k \geqslant 2$ fixé, donner le reste de la division euclidienne de X^k par P.

c. En déduire (λ_k, μ_k) pour $k \geqslant 2$.

Correction :

1. La fonction u est bien à valeurs dans $M_2(\mathbb{R})$, de plus on a, pour deux matrices M et N de $M_2(\mathbb{R})$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$u(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A = \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) = \lambda u(M) + \mu u(N).$$

Cela prouve que u est linéaire, et c'est donc bien un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. **a.** On écrit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a alors

$$M \in \ker(u) \iff u(M) = 0 \iff AM - MA = 0,$$

on calcule frontalement les coefficients de $AM - MA$:

$$M \in \ker(u) \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 4c-a & 4d-b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a-b & 2a+4b \\ c-d & 2c+4d \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} b = -2c \\ d = a - 3c \end{cases},$$

en sautant les détails. Ainsi,

$$\ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a-3c \end{pmatrix}, (c,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix})$$

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ étant non colinéaires, elles forment une famille libre, et c'est donc une base de $\ker(u)$.
Donc, $\dim(\ker(u)) = 2$.

b. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(\ker(u)) = 4 - 2 = 2$. Ainsi, il suffit de deux matrices non colinéaires de $\mathrm{Im}(u)$ pour obtenir une base. On peut transporter les premières matrices de la base canonique :

$$u(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices formant une famille libre, elles forment donc une base de $\mathrm{Im}(u)$.

3. Nous allons retrouver les résultats de la question **Q2** avec très peu de calculs.

a. On les a déjà calculées plus haut (sinon, on les recalcule). On a alors

$$\mathrm{Vect}(u(E_{11}), u(E_{12})) \subset \mathrm{Im}(u),$$

Or comme ces deux matrices forment une famille libre, on a $2 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(u))$.

b. On vérifie que $u(I_2) = u(A) = 0$, donc comme $\ker(u)$ est un sev, on a $\mathrm{Vect}(I_2, A) \subset \ker(u)$.
Remarque : Notez que l'argument que $\ker(u)$ est un sev est important : il permet de passer de I_2 et A à toutes leurs combinaisons linéaires.

c. Puisque (I_2, A) est libre, comme ci-dessus, on déduit : $2 \leqslant \dim(\ker(u))$.

d. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = 4$. On a déjà $\mathrm{rg}(u) \geqslant 2$ et $\dim(\ker(u)) \geqslant 2$. Si une de ces inégalités étaient strictes, on auraient $\mathrm{rg}(u) + \dim(\ker(u)) > 4$, absurde. D'où :

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\ker(u)) = 2.$$

e. Puisque $\dim(\ker(u)) = 2$ et que la famille (I_2, A) est une famille libre de $\ker(u)$, c'en est aussi une base.

f. Il est direct que $u(A^k) = 0$, donc $A^k \in \ker(u)$. Comme (I_2, A) est une base de $\ker(u)$, on déduit : $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists!(\lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^2\ :\ A^k = \lambda_k I_2 + \mu_k A$.

4. Dans cette question qui peut être traitée indépendamment, nous allons calculer les puissances de A.

a. On calcule A^2, et on résout un système (ou on voit à l'oeil). On trouve après calculs : $(\lambda_2, \mu_2) = (5, -6)$. Autrement dit :
$$A^2 = 5A - 6I_2 \iff A^2 - 5A + 6I_2 = 0.$$
On introduit le polynôme $P = X^2 - 5X + 6$, il vérifie bien $P(A) = 0$.

b. Ce reste est de degré au plus 1, donc on cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$X^k = PQ + aX + b = X^2 - 5X + 6 + aX + b.$$
Pour trouver le reste sans caluler Q, on évalue cette relation en les racines de P. Ces racines sont 2 et 3, ainsi :
$$\left\{ \begin{array}{l} 2^k = 2a + b \\ 3^k = 3a + b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 3^k - 2^k \\ b = 3 \cdot 2^k - 2.3^k \end{array} \right.$$

c. On évalue la division euclidienne précédente en A :
$$A^k = P(A)Q(A) + aA + b\,\mathrm{Id}_2,$$
or par construction, $P(A) = 0$, d'où
$$A^k = aA + b\,\mathrm{Id}_2,$$
autrement dit
$$\lambda_k = b = 3 \cdot 2^k - 2.3^k \quad \text{et} \quad \mu_k = a = 3^k - 2^k$$

Pour aller plus loin : Les éléments de $\ker(u)$ sont les matrices qui commutent avec A, appelé le commutant de A. On peut avoir en tête que ls puissances de A (et donc les polynômes en A) appartiennent toujours au commutant, mais il peut y avoir d'autres matrices. La recherche du commutant est un thème classique, on verra d'autres techniques quand on saura diagonaliser une matrice.

La dernière partie est classique : calculer les puissances d'une matrices en ayant calculé un polynôme annulateur. Pour une matrice de taille 2×2, un annulateur est toujours $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$, où la trace et le déterminant se calculent facilement, voir 2e année. Enuite, on calcule le reste de la division euclidienne de X^k par P (outils du cours sur les polynômes), et on évalue en A.

Exercice 3 - Intégrales : étude d'une fonction définie par une intégrale. Soit la fonction $F(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Etude rapide de la fonction F.

- **a.** Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donner la monotonie de la fonction F.
- **b.** Pour $t \geqslant 1$, comparer e^{-t} et e^{-t^2}. En déduire : $\forall x \geqslant 1, \quad F(x) \leqslant e^{-1}$.
- **c.** La fonction F a-t-elle une limite en $+\infty$?

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G : x \mapsto x \int_1^2 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

- **a.** Par un changement de variable adéquat, montrer : $G(x) = \int_x^{2x} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.
- **b.** Exprimer G en fonction de F, puis en déduire que G est dérivable, et calculer G'.
- **c.** Donner le DL de G à l'ordre 3 en 0. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de G en 0, ainsi que sa position relative au voisinage de 0.
- **d.** Etablir le tableau de variations de G sur $[0, +\infty[$.
- **e.** Montrer : $\forall x > 0, \quad xe^{-4x^2} \leqslant G(x) \leqslant xe^{-x^2}$.

Correction : **Exerice issu de banque PT 2021C**

1. **a.** La fonction F est la primitive qui s'annule en 1 de $x \mapsto e^{-x^2}$, qui est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}, \; F'(x) = e^{-x^2} > 0$. Ainsi, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Bien sûr, la fonction F est en fait $C^\infty(\mathbb{R})$.

b. On a :

$$\forall t \geqslant 1 : t \leqslant t^2 \implies e^{-t^2} \leqslant e^{-t} \text{ par décroissance de } t \mapsto e^{-t}$$

Par monotonie de l'intégrale

$$\forall x \geqslant 1, \quad \int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_1^x = e^{-1} - e^{-x} < e^{-1}.$$

c. La fonction F est croissante et majorée, par le théorème de la limite de la dérivée, elle a une limite finie en $+\infty$.

2. **a.** Pour $x \neq 0$ fixé, on pose naturellement $u = xt$. C'est un changement de variable linéaire facile : $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$, et

$$G(x) = x \int_x^{2x} e^{-u^2} \frac{\mathrm{d}u}{x} = \int_x^{2x} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

b. En utilisant Chasle :

$$G(x) = \int_x^1 e^{-u^2}\,\mathrm{d}u + \int_1^{x^2} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = F(x^2) - F(x).$$

On déduit par somme et composée que G est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.$$

c. On peut faire le DL de G' en 0 et le primitiver :

$$G'(0) = 2(1 - 4x^2 + o(x^2)) - (1 - x^2 + o(x^2)) = 1 - 7x^2 + o(x^2).$$

D'où par primitivation de DL, sans oublier la constante :

$$G(x) = G(0) + x - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3)$$

Alternative : Les plus bourrins peuvent utiliser Taylor Young car on a déjà $G(0) = 0$ et $G'(0) = 2 - 1 = 1$. Par ailleurs,

$$G''(x) = -16xe^{-4x^2} + 2xe^{-x^2} \quad \text{et} \quad G'''(x) = -16e^{-4x^2} + 128x^2e^{-4x^2} + 2e^{-x^2} - 4xe^{-x^2}$$

d'où $G''(0) = 0$ et $G''(0) = -14$, ainsi d'après Taylor-Young :

$$G(x) = x - \frac{14}{6}x^3 + o(x^3) = x - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3).$$

On déduit que G admet pour tangente en 0 la droite d'équation $y = x$, de plus

$$G(x) - x \sim -\frac{7}{3}x^3 \begin{cases} < 0 & \text{si } x > 0 \\ > 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

d. On résout $G'(x) = 0$:

$$G'(x) = 0 \iff 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = 0 \iff 2e^{-3x^2} - 1 = 0 \iff e^{3x^2} = 2 \iff x = \pm\sqrt{\frac{\ln 2}{3}},$$

et on prend la solution positive puisque l'étude a lieu sur $\mathbb{R}_+$. On déduit facilement que G est strictement croissante sur $[0, \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}]$ puis décroissante sur $[\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}, +\infty[$.

e. On peut revenir à la définition ou travailler avec la forme issue du changement de variable, la méthode est la même. On a pour $x > 0$ que $2x > x$, et donc par décroissance de $t \mapsto e^{-t^2}$ sur $[x, 2x]$:

$$\forall t \in [x, 2x], \quad e^{-4x^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2},$$

On intégre de x à $2x$:

$$\int_x^{2x} e^{-4x^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} e^{-x^2}\, \mathrm{d}t,$$

or les membres de gauche et de droite se calculent facilement puisqu'on intègre des constantes :

$$\int_x^{2x} e^{-4x^2}\, \mathrm{d}t = e^{-4x^2}\int_x^{2x} \mathrm{d}t = xe^{-4x^2} \quad \text{et de même} \quad \int_x^{2x} e^{-x^2}\, \mathrm{d}t = xe^{-x^2}.$$

Exercice 4 - Deux exercices de géométrie dans le plan.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble du plan défini par l'équation cartésienne : $x^2 - 6x + y^2 + 8y = \lambda$.
   - **a.** Décrire l'ensemble $\mathcal{E}$ selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - **b.** Dans cette question, $\lambda = 0$. Vérifier que le point $A(6, 0)$ est dans $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{T}$ la droite tangente à $\mathcal{E}$ en A. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{T}$.
   - **c.** Soient les points $C(2, 3)$ et $D(-1, 6)$. Déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrique de la droite (CD).
   - **d.** Déterminer la distance du point $(3, -4)$ à la droite (CD).
   - **e.** Déterminer, selon la valeur de λ, la nature de l'intersection $\mathcal{E} \cap (CD)$. On ne demande pas de déterminer explicitement cette intersection.
2. Soit ABC un triangle équilatéral direct, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$, de côté $c > 0$.
   - **a.** Vérifier que pour tout point M du plan, la quantité $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] + [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}] + [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}]$ ne dépend pas de M, et donner sa valeur en fonction de c. On pourra écrire $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ et faire de même pour $\overrightarrow{BM}$.
   - **b.** En déduire que lorsque M est à l'intérieur du triangle ABC, la somme des distances de M aux trois côtés du triangle ne dépend pas de M.

Correction :

1. Proche du cours, voir corrigé de M. Scotto
2. Soit ABC un triangle équilatéral direct, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$de côté $c > 0$.
   - **a.** On a :

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] + [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}] + [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}] &= [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}] + [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}] + [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}] \\
&= [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CM},] + [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CM}] + [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}] + [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}] \\
&= [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}] \\
&= [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{0}] = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]
\end{aligned}$$

Cette quantité ne dépend pas de M. On peut la calculer :

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = c^2 \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = c^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{car} \quad ABC \text{ direct}$$

On peut noter que cette quantité est l'aire (signée) du triangle, y compris si le triangle est indirect.

b. Soit M à l'intérieur du triangle ABC, exprimons les distances aux côtés à l'aide du produit mixte :

$$d(M,(AB)) = \frac{|[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}]|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Attention à bien gérer cette valeur absolue. Comme M est à l'intérieur du triangle, l'angle $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})$ est compris dans $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$, de plus (faire un dessin)

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) \begin{cases} >0 \text{ si } & ABC \text{ indirect} \\ <0 \text{ si } & ABC \text{ direct} \end{cases}.$$

Ainsi comme le triangle est direct,

$$d(M,(AB)) = -\frac{[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}]}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}]}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

on a des formules similaires pour $d(M,(BC))$ et $d(M,(AC))$. En sommant, on obtient :

$$\begin{aligned} d(M,(AB)) + d(M,(BC)) + d(M,(CA)) &= \frac{[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}]}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BM}]}{\|\overrightarrow{BC}\|} + \frac{[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}]}{\|\overrightarrow{CA}\|} \\ &= \frac{[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}] + [\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BM}] + [\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}]}{c} = c\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

qui ne dépend pas de M.
On peut noter que tout fonctionne pareil avec un triangle indirect, avec une gestion des signes opposés.

Exercice 5 - Dénombrement. On dispose d'un jeu de cartes ordinaire de 52 cartes comprenant 13 hauteurs (de l'as au roi) de 4 cartes (cœur, carreau, pique, trèfle). Les cartes sont mélangées et vous piochez « à l'aveugle » 6 cartes que vous posez devant vous en formant une pile.

1. Vous prenez ces cartes en main, leur placement n'ayant pas d'importance.
   - **a.** Combien y a-t-il de mains possibles ?
   - **b.** Combien y-a-t-il de mains comprenant 3 rois et 3 dames ?
   - **c.** Combien y-a-t-il de mains comprenant exactement 2 hauteurs ?
2. Vous laissez la pile devant vous sans modifier l'ordre. Le jeu consiste à retourner les cartes (face visible vers le haut) une à une et les placer devant vous de gauche à droite dans l'ordre de retournement (la position est importante).
   - **a.** Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
   - **b.** Combien y-a-t-il de tirages comprenant 6 hauteurs différentes ?
   - **c.** Un ami vous rejoint au moment où vos 6 cartes sont visibles. Il vous dit qu'il avait eu précédemment le même tirage que vous mais dans un ordre différent. Combien de tels tirages sont possibles ?
3. Vous jouez à présent au jeu qui consiste à partir de 6 paquets de 52 cartes, d'en piocher une « à l'aveugle » dans chacun des paquets et les prendre en main dans l'ordre de retournement (la position est importante).
   - **a.** Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
   - **b.** Combien y-a-t-il de tirages comprenant au moins un as ?

Correction :

1. Vous prenez ces cartes en main, leur placement n'ayant pas d'importance.
   - **a.** On dénombre des combinaisons de 6 éléments dans un ensemble de 52 éléments, donc $\binom{52}{6}$.
   - **b.** On choisit une combinaisons de 3 rois parmi 4, et pareil pour les dames, d'où $\binom{4}{3} \times \binom{4}{3} = 4 \times 4 = 16$.
   - **c.**
2. Vous laissez la pile devant vous sans modifier l'ordre. Le jeu consiste à retourner les cartes (face visible vers le haut) une à une et les placer devant vous de gauche à droite dans l'ordre de retournement (la position est importante).
   - **a.** On doit désormais dénombrer des 6-arrangements, donc $A_6^{52} = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 = \frac{52!}{46!}$ possibilités.

b. On choisit un 6 arrangements des hauteurs, soit A_6^{13} choix, ensuite on a quatre choix pour chaque hauteur, donc au total $A_6^{13} \times 4^6$ choix. On peut aussi compter frontalement : 52 choix pour la première, puis 48, etc..., soit $52 \times 48 \times 44 \times 42 \times 38 \times 34$ choix possibles. En mettant 4 en facteur dans chaque facteur, on retrouve le résultat.

c. Cet ami a donc eu une permutation, c'est-à-dire une bijection, de nos cartes, mais différente de l'identité. Il y a donc $6! - 1$ telles bijections.

3. **a.** Il s'agit maintenant d'une 6-listes (ou encore : 6-uplet). Il y a 52^6 possibilités.

b. On passe par le complémentaire : il y a 48^6 tirages avec aucun as, et donc $52^6 - 48^6$ tirages ave au moins un as.