DST 6

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^3$. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Dans cet exercice, les éléments de $\mathbb{R}^3$ sont notés en colonne. Soit l'application $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u : X \mapsto MX$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, expliciter $u(X)$.

2. Déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

3. La fonction u est-elle un automorphisme ?

4. Pour $X \in \mathbb{R}^3$, calculer $u \circ u(X)$. Qu'en déduire pour u ?

5. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u - \mathrm{Id})$. En déduire une base de $\ker(u - \mathrm{Id})$.

6. Justifier que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \bigoplus \ker(u - \mathrm{Id})$. En déduire qu'il existe une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que tout $X \in \mathbb{R}^3$ se décompose en $X = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$, avec de plus $u(X) = \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$.

Exercice 2 - Algèbre linéaire : calcul d'un commutant et applications. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Soit l'application $u : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ définie par $u : M \mapsto AM - MA$.

On se propose de déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ par deux approches très différentes.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. **a.** Déterminer par le calcul une base de $\ker(u)$, et donner sa dimension.
 b. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$.

3. Nous allons retrouver les résultats de la question **Q2** avec très peu de calculs.
 a. Calculer $u(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ et $u(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$. En déduire : $\mathrm{rg}(u) \geqslant 2$.
 b. Montrer que $\mathrm{Vect}(I_2, A) \subset \ker(u)$.
 c. Qu'en déduire pour $\dim(\ker(u))$?
 d. En déduire $\dim(\ker(u))$ et $\mathrm{rg}(u)$.
 e. En déduire une base de $\ker(u)$.
 f. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \in \ker(u)$. En déduire : $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists!(\lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^2\ :\ A^k = \lambda_k I_2 + \mu_k A$.

4. Dans cette question qui peut être traité indépendamment, nous allons calculer les puissances de A.
 a. Calculer explicitement (λ_2, μ_2). En déduire un poynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.
 b. Pour $k \geqslant 2$ fixé, donner le reste de la division euclidienne de X^k par P.
 c. En déduire (λ_k, μ_k) pour $k \geqslant 2$.

Exercice 3 - Intégrales : étude d'une fonction définie par une intégrale. Soit la fonction $F(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Etude rapide de la fonction F.

a. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donner la monotonie de la fonction F.

b. Pour $t \geqslant 1$, comparer e^{-t} et e^{-t^2}. En déduire : $\forall x \geqslant 1, \quad F(x) \leqslant e^{-1}$.

c. La fonction F a-t-elle une limite en $+\infty$?

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G : x \mapsto x\int_1^2 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Par un changement de variable adéquat, montrer : $G(x) = \int_x^{2x} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

b. Exprimer G en fonction de F, puis en déduire que G est dérivable, et calculer G'.

c. Donner le DL de G à l'ordre 3 en 0. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de G en 0, ainsi que sa position relative au voisinage de 0.

d. Etablir le tableau de variations de G sur $[0, +\infty[$.

e. Montrer : $\forall x > 0, \quad xe^{-4x^2} \leqslant G(x) \leqslant xe^{-x^2}$.

Exercice 4 - Deux exercices de géométrie dans le plan.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble du plan défini par l'équation cartésienne : $x^2 - 6x + y^2 + 8y = \lambda$.

a. Décrire l'ensemble $\mathcal{E}$ selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. Dans cette question, $\lambda = 0$. Vérifier que le point $A(6, 0)$ est dans $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{T}$ la droite tangente à $\mathcal{E}$ en A. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{T}$.

c. Soient les points $C(2, 3)$ et $D(-1, 6)$. Déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrique de la droite (CD).

d. Déterminer la distance du point $(3, -4)$ à la droite (CD).

e. Déterminer, selon la valeur de λ, la nature de l'intersection $\mathcal{E} \cap (CD)$. On ne demande pas de déterminer explicitement cette intersection.

2. Soit ABC un triangle équilatéral direct, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$, de côté $c > 0$.

a. Vérifier que pour tout point M du plan, la quantité $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] + [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}] + [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}]$ ne dépend pas de M, et donner sa valeur en fonction de c. On pourra écrire $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ et faire de même pour $\overrightarrow{BM}$.

b. En déduire que lorsque M est à l'intérieur du triangle ABC, la somme des distances de M aux trois côtés du triangle ne dépend pas de M.

Exercice 5 - Dénombrement. On dispose d'un jeu de cartes ordinaire de 52 cartes comprenant 13 hauteurs (de l'as au roi) de 4 cartes (cœur, carreau, pique, trêfle). Les cartes sont mélangées et vous piochez « à l'aveugle » 6 cartes que vous posez devant vous en formant une pile.

1. Vous prenez ces cartes en main, leur placement n'ayant pas d'importance.

a. Combien y a-t-il de mains possibles ?

b. Combien y-a-t-il de mains comprenant 3 rois et 3 dames ?

c. Combien y-a-t-il de mains comprenant exactement 2 hauteurs ?

2. Vous laissez la pile devant vous sans modifier l'ordre. Le jeu consiste à retourner les cartes (face visible vers le haut) une à une et les placer devant vous de gauche à droite dans l'ordre de retournement (la position est importante).

a. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

b. Combien y-a-t-il de tirages comprenant 6 hauteurs différentes ?

c. Un ami vous rejoint au moment où vos 6 cartes sont visibles. Il vous dit qu'il avait eu précédemment le même tirage que vous mais dans un ordre différent. Combien de tels tirages sont possibles ?

3. Vous jouez à présent au jeu qui consiste à partir de 6 paquets de 52 cartes, d'en piocher une « à l'aveugle » dans chacun des paquets et les prendre en main dans l'ordre de retournement (la position est importante).

a. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

b. Combien y-a-t-il de tirages comprenant au moins un as ?