DST 6

Exercice 1 - Connaître et appliquer son cours.

1. **a.** Rappeler la définition de la dimension d'un espace vectoriel.
   b. Donner la base canonique et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.
   c. Soient deux sous-espace vectoriels F et G d'un espace vectoriel E. Rappeler la défnition de "F et G sont en somme directe", et montrer que c'est le cas si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.
2. Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 3X^3 - 2X + 1$ par $X^2 - 2$.
3. Décrire l'ensemble des points du plan dont une équation cartésienne est
$$x^2 - 3x + y^2 + 4y = 0.$$

Exercice 2 - Calcul de puissance par la division euclidienne.

Soit
$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2. On admet pour gagner du temps que
$$A^3 = \begin{pmatrix} -165 & 37 & 64 \\ -165 & 10 & 91 \\ -138 & 37 & 37 \end{pmatrix}$$
2. Montrer que (I_3, A, A^2) est une famille libre.
3. Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}(I_2, A, A^2)$?
4. Vérifier que le polynôme $P = X^3 + 10X^2 + 33X + 36$ satisfait $P(A) = 0$.
5. A-t-on $A^3 \in \mathrm{Vect}(I_2, A, A^2)$?
6. En utilisant **Q4**, montrer que A est inversible et donner son inverse.
7. On s'intéresse aux racines du polyôme P'.
   a. Déterminer les racines de P'
   b. Vérifier qu'une des racines de P' est aussi racine de P.
   c. Qu'en déduire pour cette racine ?
   d. Justifier sans calcul que l'autre racine de P' ne pouvait pas être aussi racine de P.
   e. Donner la décomposition de P en produit de facteurs irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Ce polynôme est-il scindé ?
8. Soit $n \geqslant 3$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X+3)^2(X+4)$.
9. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, il existe trois réels α_n, β_n et γ_n, que l'on explicitera, tels que
$$A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n A + \gamma_n A^2.$$
10. Vérifier que votre résultat coïncide dans le cas $n = 3$ avec la question **Q4**.
11. Soient trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\begin{cases} x_{n+1} = -7x_n + y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = -5x_n - 2y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = -4x_n + y_n - z_n \end{cases} \quad \text{avec } x_0 = 0, \quad y_0 = 1 \ \text{ et } \ z_0 = 0.$$

Expliciter ces trois suites (on pourra se contenter de les exprimer en fonction de α_n, β_n et γ_n).

Exercice 3 - Une équation sur un polynôme.

Pour $q \in \mathbb{N}$, on considère

$$E_q = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid (X-2)P' = qP\}$$

1. Justifier que le polynôme nul est un élément de E_q.

2. Montrer que E_q est un espace vectoriel.

3. Déterminer E_0 ainsi que sa dimension.

4. On souhaite déterminer E_1 :

- **a.** Justifier que les polynômes de degré 0 n'appartiennent pas à E_1.
- **b.** Soit $P \in E_1$ non nul. En raisonnant sur le cofficient dominant de P, montrer que $\deg(P) = 1$.
- **c.** En déduire E_1.

5. Le but des questions suivantes est de déterminer E_q pour $q \geqslant 2$.

- **a.** En raisonnant comme à la question **4b**, montrer qu'un polynôme $P \in E_q$ avec $P \neq 0$ vérifie $\deg(P) = q$.
- **b.** Montrer que 2 est racine de P.
- **c.** On souhaite montrer que 2 est la seule racine de P. Pour cela, on suppose que P admet une autre racine $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{2\}$.
  - **(i)** Montrer en utilisant la formule de Leibniz que
  $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (X-2)P^{(k+1)} + kP^{(k)} = qP^{(k)}$$
  - **(ii)** En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P^{(k)}(\alpha) = 0$.
  - **(iii)** En utilisant la formule de Taylor en α, en déduire P, et une contradiction.
- **d.** Conclure.

Exercice 4 - Factorisation avec un paramètre.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on introduit le polynôme

$$P = X^4 + \lambda X^3 + 4(\lambda - 2)X^2 + 4\lambda X + 16.$$

1. Calculer $P(-2)$ et $P'(-2)$

2. Qu'en déduire ?

3. Effectuer la division euclidienne de P par $X^2 + 4X + 4$.

4. Décomposer P en facteurs irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ (on discutera selon les valeurs de λ).

5. Ce polynôme est-il scindé sur $\mathbb{R}$? et sur $\mathbb{C}$?

Exercice 5 - Etude asymptotique.

Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{\sqrt{1+x^4}} e^{\frac{1}{x^2}}$. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera une équation et la position relative par rapport à la courbe.

Exercice 6 - Autour d'un triangle.

Soit ABC un triangle tel que $A(1,3)$, $B(5,7)$ et $C(2,8)$.

1. Donner une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.

2. Donner une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[BC]$.

3. Donner les coordonnées de l'intersection de ces deux médiatrices. On notera K ce point.

4. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

5. Déterminer une équation cartésienne de la médiane relative au segment $[A, B]$.

6. Déterminer la distance du point C à la droite (AB).