ex

1) Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$u(\lambda X + \mu Y) = M(\lambda X + \mu Y) = \lambda MX + \mu MY = \lambda u(X) + \mu u(Y)$

D'où, u appli lin de $\mathbb{R}^3$ ds $\mathbb{R}^3$,

D'où, u endo de $\mathbb{R}^3$

2) $\operatorname{Ker} u = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ 4y + 12z = 0 \\ -y - 3z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ y = -3z \end{cases} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} x = -z \\ y = -3z \\ z = z \end{cases} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\dim \operatorname{Ker} u = 1$

D'où, d'après le théo du rang, $\dim \operatorname{Im} u = 2$.

Soit (e_1, e_2, e_3) b. c de $\mathbb{R}^3$

$u(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $u(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, vect libres

$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

3) $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$, donc u non inj, donc u non bij, donc u non auto

4) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $u(X) = \begin{pmatrix} x + y + 4z \\ 4y + 12z \\ -y - 3z \end{pmatrix}$

$u(u(X)) = u\begin{pmatrix} x + y + 4z \\ 4y + 12z \\ -y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 4z + 4y + 12z - 4y - 12z \\ 16y + 48z - 12y - 36z \\ -4y - 12z + 3y + 9z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 4z \\ 4y + 12z \\ -y - 3z \end{pmatrix} = u(X)$

u projection.

5) Procédons par double inclusion

Mq $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(u - id)$

Soit $y \in \operatorname{Im}(u)$

$\exists x \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = u(x)$

$(u - id)(y) = u(y) - y = \underline{u \circ u}(x) - u(x)$

$= u(x) - u(x)$ car $u \circ u = u$

$= 0$

d'où $y \in \operatorname{Ker}(u - id)$

Mq $\operatorname{Ker}(u - id) \subset \operatorname{Im} u$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - id)$

$(u - id)(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = x$

x admet x par antécédent par u

d'où $x \in \operatorname{Im} u$

Par double inclusion

$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u - id)$

d'où
$$\operatorname{Ker}(u - id) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}\right)$$

6) Plein de méthodes possibles :

$\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$ 3 vect « clair^t » libres de $\mathbb{R}^3$.

Donc $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - id)$

Notons (f_1, f_2, f_3) cette base de $\mathbb{R}^3$

Tt élt de $\mathbb{R}^3$ se décompose d'une unique façon ds cette base

D'où $\exists! \, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \mid X = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$

et
$$u(X) = u(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3)$$
$$= \alpha_1 u(f_1) + \alpha_2 u(f_2) + \alpha_3 u(f_3)$$

Or

$f_1 \in \operatorname{Ker} u$, d'où $u(f_1) = 0$

$\left.\begin{matrix} f_2 \\ f_3 \end{matrix}\right\} \in \operatorname{Ker}(u - id)$, d'où $\begin{matrix}(u-id)(f_2) = 0 \iff u(f_2) = f_2 \\ (u - id)(f_3) = 0 \iff u(f_3) = f_3\end{matrix}$

d'où
$$u(X) = \alpha_1 \times 0 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$$
$$u(X) = \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$$

ex

1) Soient $(M,N) \in (M_2(\mathbb{R}))^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} u(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A \\ &= \lambda AM + \mu AN - \lambda MA - \mu NA \\ &= \lambda (AM - MA) + \mu (AN - NA) \\ &= \lambda u(M) + \mu u(N) \end{aligned}$$

u appli lin de $M_2(\mathbb{R})$ ds $M_2(\mathbb{R})$

Donc u endo de $M_2(\mathbb{R})$

2) a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$M \in \operatorname{Ker} u \iff \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ -x+4z & -y+4t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x-y & 2x+4y \\ z-t & 2z+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} y + 2z = 0 \\ -2x - 3y + 2t = 0 \\ -x + 3z + t = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3z - t = 0 \\ 2x + 3y - 2t = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3z - t = 0 \\ 3y + 6z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3z + t \\ y = -2z \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{2 clair}^t \text{ libres}}\Big) \quad ; \quad \dim \operatorname{Ker} u = 2$$

b) D'après le thm du rang, $\dim \operatorname{Im} u = 2$.

$$\left.\begin{aligned} u(E_{11}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ u(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{clair}^t \text{ libres}$$

D'où $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$

3 a) Déjà fait

$$u(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad u(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ vect libres

Or

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(E_{11}), u(E_{12}), u(E_{21}), u(E_{22})) \supset \mathrm{Vect}(u(E_{11}), u(E_{$$

Or,

$\mathrm{Vect}(u(E_{11}), u(E_{12}))$ de dimension 2 (car vect libres)

D'où $\mathrm{rg}(u) \geq 2$.

b) $u(I) = AI - IA = A - A = 0$

$u(A) = AA - AA = 0$

D'où $\mathrm{Vect}(I, A) \subset \mathrm{Ker}\, u$

c) or, (I, A) f libre

d'où $\dim \mathrm{Ker}\, u \geq 2$

d) D'après théo rang, $\underbrace{\dim \mathrm{Ker}\, u}_{\geq 2} + \underbrace{\dim \mathrm{Im}\, u}_{\geq 2} = \dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

d'où $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u = 2$ (absurde sinon ☺)

e) D'où $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Vect}(I, A)$

f) $\forall k \in \mathbb{N}$

$u(A^k) = AA^k - A^kA = A^{k+1} - A^{k+1} = 0$

d'où $A^k \in \mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Vect} \underbrace{(I, A)}_{\text{base de } \mathrm{Ker}\, u}$

Donc, $\exists ! (\lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^2 \mid A^k = \lambda_k I + \mu_k A$

4) a) « Cours »

$$P = X^2 - tr(A) X + det(A)$$

$$P = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$

D'où

$$A^2 = -6I + 5A \quad , \quad (\lambda_2 = -6, \mu_2 = 5).$$

b) Division euclidienne

$\exists\, Q \in \mathbb{R}[X]$, $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ /

$$X^k = PQ + a_k X + b_k$$

- On évalue en 2 et 3

$$\begin{cases} 2^k = 2a_k + b_k \\ 3^k = 3a_k + b_k \end{cases} \iff \begin{cases} a_k = 3^k - 2^k. \\ b_k = 3 \times 2^k - 2 \times 3^k \end{cases}$$

d'où

$$R = (3^k - 2^k) X + (3 \times 2^k - 2 \times 3^k)$$

c) On évalue en A

$$A^k = (3^k - 2^k) A + (3 \times 2^k - 2 \times 3^k) I$$

ex

1) a) F est la primitive qui s'annule en 1 de $f : t \mapsto e^{-t^2}$ continue sur $\mathbb{R}$

Donc F dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f continue sur $\mathbb{R}$

Donc $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = e^{-x^2} > 0$

Donc F $\nearrow\nearrow$ sur $\mathbb{R}$ $\quad (F(1) = 0)$

b) $\forall t \geq 1, \quad t \leq t^2 \Rightarrow -t^2 \leq -t$

La fct $x \mapsto e^x$ $\nearrow\nearrow$

D'où

$\forall t \geq 1, \quad e^{-t^2} \leq e^{-t}$

D'où, par croissance de l'intégrale

$\forall x \geq 1, \; F(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_1^x = e^{-1} - \underbrace{e^{-x}}_{>0} \leq e^{-1}$

c) F $\nearrow$ majorée

TLM, F admet une limite en $+\infty$ (positive et m strict^t...)

2) a) $\begin{cases} u = xt \\ du = x\,dt \end{cases}$, $\quad G : x \mapsto x \int_1^2 e^{-(xt)^2} dt$

$\downarrow$ Chg^t var.

$G : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-u^2} du$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = F(2x) - F(x)$

G dérivable comme composée de fct dériv (et différence)

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = 2F'(2x) - F'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$

c) G dérivable, G' admet un $DL_3(0)$, (d'où primitivation sur DL)

$G'(x) \underset{0}{=} 2(1 - 4x^2 + 8x^4 + o(x^5)) - (1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5))$

$G'(x) \underset{0}{=} 1 - 7x^2 + 15{,}5x^4 + o(x^5)$

$G(x) \underset{0}{=} \underbrace{G(0)}_{0} + x - \frac{7}{3}x^3 + 3{,}1x^5 + o(x^6)$

$y = x$ eq (T_0)

$$G(x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{7}{3}x^3$$

$\mathcal{E}_G$ sous T_0 en 0^+ et au-dessus en 0^-

d) G' impaire sur $\mathbb{R}$

Donc G paire sur $\mathbb{R}$ (d'où $[0;+\infty[$)

Sur $\mathbb{R}_+$

$$G'(x) = 0 \iff 2\left(e^{-x^2}\right)^4 - \left(e^{-x^2}\right) = 0$$

$$\iff \left(e^{-x^2}\right)\left(2\left(e^{-x^2}\right)^3 - 1\right) = 0$$

$$\iff e^{-x^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$\iff -x^2 = \frac{1}{3}\ln(1/2)$$

$$\iff x^2 = \frac{1}{3}\ln(2)$$ on restreint sur $\mathbb{R}_+$

$$\iff x = \sqrt{\frac{1}{3}\ln(2)}$$

x	0		$\sqrt{\frac{1}{3}\ln(2)}$		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
G	0	$\nearrow$		$\searrow$	

3) $u \mapsto e^{-u^2}$ $\searrow$ sur $\mathbb{R}_+$

d'où $\forall u \in [x, 2x]$, $e^{-4x^2} \leq e^{-u^2} \leq e^{-x^2}$

d'où $\forall x > 0$,

$$x e^{-4x^2} = \int_x^{2x} e^{-4x^2}\,du \leq G(x) = \int_x^{2x} e^{-u^2}\,du \leq \int_x^{2x} e^{-x^2}\,du = (2x - x)e^{-x^2} = x e^{-x^2}$$

ex

$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y+4)^2 = \lambda + 25 \right\}$

a) si $\lambda < -25$, $\mathcal{E} = \emptyset$

si $\lambda = -25$, $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

si $\lambda > -25$, $\mathcal{E} = \mathcal{C}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} +3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\text{centre } I}, \underbrace{R = \sqrt{\lambda + 25}}_{\text{rayon}} \right)$ cercle

b) $\lambda = 0$

$(6-3)^2 + (0+4)^2 = 9 + 16 = 25 = 0 + 25$, donc $A \in \mathcal{E}$

$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-6 \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9(x-6) - 4y = 0$

c) • $[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CM}] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow -3(y-3) - 3(x-2) = 0$

• $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

d) $d = \dfrac{|[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{IC}]|}{\|\overrightarrow{CD}\|} = \dfrac{\left|\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}\right]\right|}{\sqrt{18}} = \dfrac{18}{\sqrt{18}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

e) On se place ds le cas où $\lambda \geq -25$

soit $d = d(I, (CD)) = 3\sqrt{2}$

$\times I$

• si $3\sqrt{2} > \sqrt{\lambda + 25} \Leftrightarrow 18 > \lambda + 25 \Leftrightarrow -7 > \lambda \geq -25$

$\mathcal{E} \cap (CD) = \emptyset$

• si $3\sqrt{2} = \sqrt{\lambda + 25} \Leftrightarrow \lambda = -7$

$\mathcal{E} \cap (CD) = \{\text{point}\}$ droite tgt

• si $3\sqrt{2} < \sqrt{\lambda + 25} \Leftrightarrow \lambda > -7$

$\mathcal{E} \cap (CD) = \{P_1, P_2\}$

2) a)

$$[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AB}]+[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{BC}]+[\overrightarrow{MC},\overrightarrow{CA}]$$

$$= \underbrace{[\overrightarrow{MC},\overrightarrow{AB}]}+[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}]+\underbrace{[\overrightarrow{MC},\overrightarrow{BC}]}+[\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BC}]+\underbrace{[\overrightarrow{MC},\overrightarrow{CA}]}$$

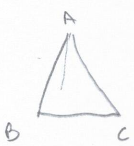
$$= \underbrace{[\overrightarrow{MC},\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}}_{0}]}_{0} + [\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}]+[\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BC}]$$

$$= -[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}] - \underbrace{[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}]}_{0 \text{ car vect col.}}$$

$$= -[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}]$$

b) $$[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AB}]+[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{BC}]+[\overrightarrow{MC},\overrightarrow{CA}] = -\Big(\underbrace{[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}]}_{\leq 0}+\underbrace{[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}]}_{\leq 0}+\underbrace{[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CA}]}_{\leq 0}\Big)$$

car M point de (ABC)



$$d(M,(AB)) = \frac{|[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}]|}{AB} = \frac{|[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}]|}{c}$$

et de m̂ pour les 3 autres

d'où, la quantité est égale à

$$+\, c\,\big(d(M,(AB)) + d(M,(AC)) + d(M,(BC))\big) = |[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}]|$$

ex

1) a) $\binom{52}{6}$

b) $\binom{4}{3}\binom{4}{3}$

c) $\binom{13}{2}\left(\binom{4}{4}\binom{4}{2} + \binom{4}{3}\binom{4}{3}\right)$

2) a) A_{52}^{6}

b) $A_{13}^{6}\ 4^{6}$

c) $6!$

3) a) 52^{6}

b) 48^{6}