

ex1

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$1) X_{n+1} = A X_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2) \text{ Soit } n \in \mathbb{N} \text{ et } (P_n): (X_n = A^n X_0)$$

$$\text{E: } X_0 = I X_0 = A^0 X_0$$

(P₀) vraie

H: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supp (P_n) vraie et mq (P_{n+1}) vraie.

$$X_{n+1} \underset{Q1}{=} A X_n \underset{H.R}{=} A A^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

d'où (P_{n+1}) vraie

⊆ (P₀) vraie et (P_n) héréditaire

d'où

$\forall n \in \mathbb{N}, (P_n) \text{ vraie.}$

$$3) A = 2I + B \quad \text{soit} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B^3 = O_3 \quad . \quad B \text{ nilpotente d'ordre } 2$$

• $2I$ mat scalaire, donc commute avec toute matrice et donc avec B

• D'après la f de binôme.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = (2I + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I)^{n-k} B^k$$

d'où

$$A^n = 2^n I + n 2^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} B^2$$

d'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3n 2^{n-1} & 4n 2^{n-1} + \frac{15n(n-1)}{2} 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & 5n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_n = 2^n x_0 + 3n 2^{n-1} y_0 + (4n 2^{n-1} + 15n(n-1) 2^{n-3}) z_0 \\ y_n = 2^n y_0 + 5n 2^{n-1} z_0 \\ z_n = 2^n z_0 \end{cases}$$

ex 2

$$\underline{\text{I}} \quad 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(-x) = \frac{\text{Arctan}(-x)}{-x} = \frac{-\text{Arctan}(x)}{-x} = f(x)$$

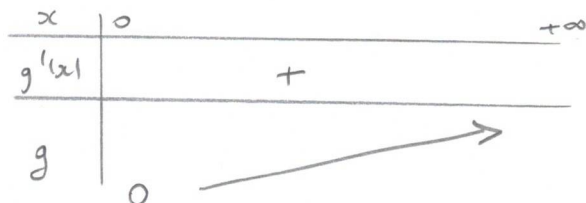
d'où

f paire sur $\mathbb{R}^*$


Arctan impaire sur $\mathbb{R}$

$$2). \text{ soit } g: x \mapsto x - \text{Arctan}(x)$$

$$g': x \mapsto 1 - \frac{1}{1+x^2}$$



d'où

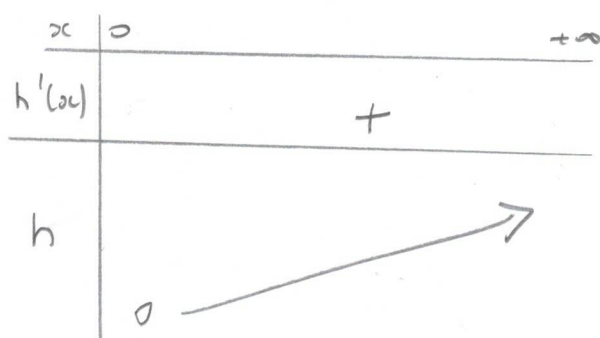
$$\underline{\forall x \geq 0, \quad g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) \leq x}$$

$$\bullet \text{ soit } h: x \mapsto \text{Arctan}(x) - \frac{x}{1+x^2}$$

$$h': x \mapsto \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$h': x \mapsto \frac{1+x^2 - 1 + x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$h': x \mapsto \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$



d'où

$$\underline{\forall x \geq 0, \quad h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan}(x)}$$

D'où

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan}(x) \leq x \quad (\text{ex feuille td})$$

3) D'après Q2

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq f(x) \leq 1$$

Par positivité de f, cet encadré est vraie sur $]-\infty; 0[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

D'où, d'après T. Encadré,

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Donc f peut être prolongé par continuité en 0, par la valeur 1.

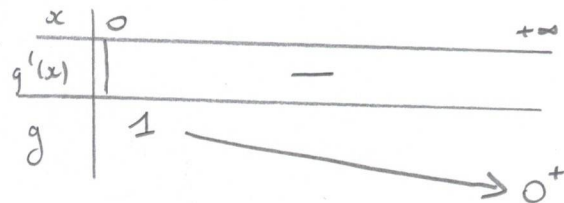
II. 1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x)}{x^2}$

2) D'après Q.I.2, $\forall x < 0$, $\frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x) \leq 0$

Donc

$\forall x > 0$, $g'(x) \leq 0$

Donc g décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$



3) g est strict⁺ décroissante de $\mathbb{R}_+$ et $g(\mathbb{R}_+) =]0, 1]$
Donc, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ de $]0, 1] = J$.

4) $\left\{ \begin{array}{l} g \text{ réalise une bij de } \mathbb{R}_+^* \text{ de }]0, 1[\\ g \text{ dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \\ g' \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}_+^* \end{array} \right.$

donc g^{-1} dérivable sur $]0, 1[$

5) $g(1) = \pi/4 \Leftrightarrow g^{-1}(\frac{\pi}{4}) = 1$

$$\cdot (g^{-1})'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{g'(g^{-1}(\frac{\pi}{4}))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{2-\pi}$$

Donc

$(T_{\frac{\pi}{4}}): y = \frac{4}{2-\pi} (x - \frac{\pi}{4}) + 1$

III)

1) soit $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid x_1 \leq x_2$

$$G(x_2) = \int_0^{x_2} g(t) dt = \int_0^{x_1} g(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} g(t) dt = G(x_1) + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} g(t) dt}_{\text{intégrale bornée croissante de } g \text{ positive, donc positif}}$$

d'où

$$G(x_2) \geq G(x_1)$$

Donc G croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2) $\forall x \in [0, \sqrt{3}]$,

$$\frac{\text{Arctan}(\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = g(\sqrt{3}) \leq g(x) \leq g(0) = 1 \quad (\text{car } g \text{ décroissante sur } [0, \sqrt{3}])$$

d'où

$$\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\text{Arctan}(\sqrt{3})}{\sqrt{3}} dx \leq \int_0^{\sqrt{3}} g(x) dx \leq \int_0^{\sqrt{3}} 1 dx = \sqrt{3}$$

d'où

$$\frac{\pi}{3} = \text{Arctan}(\sqrt{3}) \leq G(\sqrt{3}) \leq \sqrt{3}$$

3) $\forall x \geq \sqrt{3}$, $\text{Arctan}(x) \geq \text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \geq 1$
Arctan ↗

d'où

$$\forall x \geq \sqrt{3}, \quad \frac{1}{x} \leq \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$$

4) $\forall x \geq \sqrt{3}$

$$G(x) = \int_0^{\sqrt{3}} g(t) dt + \int_{\sqrt{3}}^x g(t) dt = G(\sqrt{3}) + \int_{\sqrt{3}}^x g(t) dt$$

d'où

$$G(x) \geq \frac{\pi}{3} + \int_{\sqrt{3}}^x \frac{1}{t} dt = \frac{\pi}{3} + [\ln(t)]_{\sqrt{3}}^x = \frac{\pi}{3} + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{3} + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = +\infty$

d'où, d'après le T. Div. minoration

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$$