DST 5

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Ce sujet comporte 7 pages et 5 exercices indépendants.

Exercice 1 - Deux techniques pour les puissances de matrice.

1. La marice M se décompose sous la forme

$$M = 2I_3 + N \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{triangulaire stricte,}$$

c'est une forme vue en cours. On calcule les puissances de N :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 3, N^k = 0.$$

On a $2I_3 \times N = N \times 2I_3$, donc les deux matrices $2I_3$ et N commutent. On peut appliquer le binôme de Newton : on a pour $n \geqslant 2$:

$$(2I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k.$$

Or $N^k = 0$ si $k \geqslant 3$, ainsi on a

$$\begin{aligned}(2I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k &= 2^n N^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2 \\ &= 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n \times 2^{n-1} & 3 \times n \times 2^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2} \times 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & -n \times 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. **a.** On applique une méthode du cours, comme par exemple la méthode du pivot, et on obtient que P est inversible, et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b. Après un calcul de produit matriciel, on obtient $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Cette matrice, notée D, est bien diagonale.

c. Commençons par noter que
$$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}.$$
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$: $A^n = PD^nP^{-1}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$, la propriété est donc vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que
$$A^n = PD^nP^{-1}.$$
On a alors
$$A^{n+1} = A \times A^n = (PDP^{-1}) \times (PD^nP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$
ce qui prouve que la propriété est vraie au rang $n + 1$.
On conclut par principe de récurrence.

d. Il est facile de calculer les puissances d'une matrice diagonale :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$
On déduit A^n de la formule $A^n = PD^nP^{-1}$ ainsi que du calcul de P^{-1} :

Exercice 2 - Un système à paramètres.

1. a. On pose
$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m^2+m-2 & m^2-1 \\ -3 & m^2+m-2 & 0 \\ -1 & 3(m^2+m-2) & 3(m^2-1) \end{pmatrix}$$

b. On applique la méthode. Surtout ne jamais développers les expressions, et garder les termes du type $m^2 + m - 2$ et $m^2 - 1$!
On trouve que A_m est inversible si et seulement si $m^2 + m - 2 \neq 0$ et $m^2 - 1 \neq 0$, donc si et seulement si $m \notin \{1, -1, -2\}$, et on a alors
$$A_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{4(m^2+m-2)} & \frac{1}{m^2+m-2} & -\frac{3}{4(m^2+m-2)} \\ -\frac{2}{m^2-1} & -\frac{1}{m^2-1} & \frac{1}{m^2-1} \end{pmatrix}$$

c. Lorsque la matrice A_m est inversible, on obtient
$$A_mX = B_m \iff X_m = A_m^{-1}B_m = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{4(m^2+m-2)} & \frac{1}{m^2+m-2} & -\frac{3}{4(m^2+m-2)} \\ -\frac{2}{m^2-1} & -\frac{1}{m^2-1} & \frac{1}{m^2-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m-5 \\ 3m^3-9m+15 \\ 3m^3-3m+3 \end{pmatrix}$$
soit après calculs :
$$X_m = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}(m^3-3m+6) \\ \frac{3}{4}(m-1) \\ \frac{2}{m+1} \end{pmatrix}$$
autrement dit l'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S} = \{-\frac{3}{4}(m^3 - 3m + 6, \frac{3}{4}(m-1)), \frac{2}{m+1}\}$

2. Pour les autres valeurs de m, on renvoit à la correction proposée par M. Scotto dans le DS 4 de PTSI1.

Exercice 3 - DL et équivalents.

1. On commence par mettre au même dénominateur :

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}.$$

On va faire des DL de $\sin^2 x$ en 0. On sait que ce DL va commencer par x^2, donc pour étudier $\sin^2 x - x^2$, on va à l'ordre non nul suivant. On a, en 0 :

$$\sin^2 x = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 = x^2(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))^2 = x^2(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Ainsi,

$$\sin^2 - x^2 = -\frac{x^4}{3} + o(x^4),$$

et on a de plus :

$$x^2 \sin^2 x = x^2(x^2 + o(x^2)) = x^4 + o(x^4),$$

ainsi, on injectant ces DLs :

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{1 + o(1)}$$

et donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{3}$$

2. Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x^{3/2}}$$

a. On sait que $e^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$ et donc

$$1 - e^{-x} \underset{x \to 0}{\sim} x$$

puis en faisant le quotient :

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}.$$

b. Il est clair que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}};$$

en effet il suffit de faire le quotient et de vérifier que la limite vaut 1.

a. Ceux qui ont oublié la formule pour $\tan(a + b)$ peuvent appliquer Taylor-Young à l'ordre 3, mais s'exposent à des calcul lourds de dérivée. Autrement, on a, en 0 :

$$\tan(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{1 + x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{1 - x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

Or on a

$$\frac{1}{1 - x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = 1 + (x + \frac{1}{3}x^3) - (x + \frac{1}{3}x^3)^2 + (x + \frac{1}{3}x^3)^3 + o(x^3) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

soit par produit

$$\tan(\frac{\pi}{4} + x) = (1 + x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))(1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

b. On écrit

$$u_n = \exp\left(n \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})\right).$$

Or, d'après la question précédente :

$$\ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})) \underset{n \to +\infty}{=} \ln(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{8}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})).$$

De plus, on a

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{8}{3n^3}-\frac{1}{2}(\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{8}{3n^3})^2+\frac{1}{3}(\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{8}{3n^3})^3+o(\frac{1}{n^3})\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n}+\frac{4}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

puis

$$n\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})) \underset{n\to+\infty}{=} 2+\frac{4}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

et en prenant l'exponentielle :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \exp(2+\frac{4}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2})) = e^2 e^{\frac{4}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2})} \underset{n\to+\infty}{=} e^2(1+\frac{4}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2})) = e^2+\frac{4e^2}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

où on a utilisé $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$.

3. **a.** Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^3+nx-1$. Il est direct que cette fonction est continue et strictement croissante, et que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (par calcul des limites). Ainsi, la fonction f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et l'équation

$$f_n(x) = 0,$$

d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, possède une unique solution. On la note u_n.

b. On a

$$f_n(0) = -1 < 0$$

donc si on avait $u_n \leqslant 0$, par croissance, on aurait $0 \leqslant f_n(0) = -1$, aburde. D'où $0 < u_n$. On a alors d'après l'équation définissant u_n :

$$u_n^3 + nu_n - 1 = 0 \iff u_n = \frac{1}{n} - \frac{u_n^3}{n} < \frac{1}{n}.$$

Cela prouve que

$$0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

c. On déduit la relation de l'équation définissant u_n :

$$u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^3}{n}.$$

Or on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff u_n = o(1) \iff u_n^3 = o(1) \iff \frac{u_n^3}{n} = o(\frac{1}{n})$$

On déduit, lorsque $n\to+\infty$:

$$u_n - \frac{1}{n} = o(\frac{1}{n}).$$

d. **(i)** Cela donne

$$(y_n+\frac{1}{n})^3 + n(y_n+\frac{1}{n}) - 1 = 0 \iff y_n^3 + 3\frac{y_n^2}{n} + 3\frac{y_n}{n^2} + \frac{1}{n^3} + ny_n = 0$$

(ii) L'idée est maintenant de voir quels sont les termes qui dominent et quels sont les termes que l'on peut négliger. D'après la question précédente, on a $y_n = o(\frac{1}{n})$ et donc :

$$y_n^3 + 3\frac{y_n^2}{n} + 3\frac{y_n}{n^2} = o(\frac{1}{n^3}),$$

et donc

$$ny_n = -\frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3}) \iff y_n = -\frac{1}{n^4} + o(\frac{1}{n^4})$$

(iii) Puisque $y_n = u_n - \frac{1}{n}$, on a
$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o(\frac{1}{n^4}).$$

Exercice 4 - Allure locale d'une fonction.

1. **a.** Par somme de fonctions croissantes, la fonction $h : x \mapsto 2x^3 + 2x$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on a
$$\forall x \geqslant -\frac{1}{4}, \quad h(x) \geqslant h(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{32} - \frac{1}{2} \geqslant -1.$$

b. On doit jusfifier que la quantité sous la racine est positive sur $[-\frac{1}{4}, +\infty[$. On a d'après la question précédente :
$$\forall x \geqslant -\frac{1}{4}, \quad x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 \geqslant x^4 + x^2 \geqslant 0$$

2. Voir cours, on applique la formule de Taylor-Young.

3. On peut calculer la dérivée, mais un DL est tellement plus efficace. On sait que
$$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} (1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$$
et donc, puisque
$$\lim_{x\to 0} x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x = 0$$
on a en 0
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x) + o(x) = 1 + x + o(x)$$
Ainsi, l'équation de la tangente en 0 est $y = 1 + x$.

4. On effectue un DL à l'ordre supérieur. On a, en utilisant (voir **Q2**)
$$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$$
que
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x) - \frac{1}{8}(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x)^2 + o(x^2) - x^2$$
Or
$$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x)^2 = 4x^2 + o(x^2)$$
et donc
$$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$
On déduit que
$$f(x) - (1+x) \sim -\frac{1}{2}x^2$$
Ce qui prouve que $x \mapsto f(x) - (1+x)$ est négative dans un voisinage de 0, et donc que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de sa tangente dans un voisinage de 0.

5. Mettons en facteur le terme dominant dans la racine : on a
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^4(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4})} - x^2 \\ &= x^2\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}} - x^2 \end{aligned}$$
Or on a
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} = 0$$
et donc en réutilisant le DL de $\sqrt{1+u}$ en 0 :
$$f(x) = x^2\left(1 + \frac{1}{2}(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}) - \frac{1}{8}(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4})^2 + o(\frac{1}{x^2})\right) - x^2$$

$$= x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)-x^2$$
$$= x+\frac{1}{2}+o(1)$$

Cela prouve que $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote oblique au voisinae de $+\infty$ la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.

Exercice 5 - Espaces vectoriels.

1. Montrer que les sous-ensembles suivants sous des sous-espaces vectoriels, et en donner une famille génératrice.

a. On a
$$x+y+z=0 \iff x=-y-z$$
et donc
$$F=\{(-y-z,y,z),(y,z)\in\mathbb{R}^2\}=\{y(-1,1,0)+z(-1,0,1),(y,z)\in\mathbb{R}^2\}=\text{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1)).$$
Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de E, et que la famille $((-1,1,0),(-1,0,1))$ en est une famille génératrice.
De plus, les deux vecteurs $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ étant non colinéaires, la famille $((-1,1,0),(-1,0,1))$ est libre, et c'est donc une base de F.

b. On applique un pivot au système (une seule étape suffit ici) :
$$\left\{\begin{array}{l} x+y+2z-t=0 \\ x-y-2z-t=0 \end{array}\right\} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+2y+z-t=0 \\ \quad -2y-4z \quad =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=3z+t \\ y=-2z \end{array}\right. .$$
Ainsi,
$$F=\{(3z+t,-2z,z,t),\ (z,t)\in\mathbb{R}^2\}=\{z(3,-2,1,0)+t(1,0,0,1),\ (z,t)\in\mathbb{R}^2\}=\text{Vect}((3,-2,1,0),(1,0,0,1))$$
Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de E, et pour les mêmes raisons que ci-dessus, la famille $(3,-2,1,0),(1,0,0,1)$ en est une base.

c. Voir cours. Cet ensemble, noté F, s'écrit comme
$$F=\text{Vect}(E_{11},E_{12},E_{22})$$
où E_{ij} désigne la matrice élémentaire ayant un coefficient 1 en place (i,j) et des 0 ailleurs.

d. Soit $P\in E$, que l'on écrit $P=aX^2+bX+c$, alors on a
$$P\in F \iff 2a+b=0 \iff b=-2a$$
Ainsi,
$$F=\{aX^2-2aX+c,(a,c)\in\mathbb{R}^2\}=\{a(X^2-2X)+c,\ (a,c)\in\mathbb{R}^2\}=\text{Vect}(X^2-2X,1)$$
Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de E, et pour les mêmes raisons que ci-dessus, la famille $(X^2-2X,1)$ en est une base.

2. Notons F cet ensemble. Il s'agit d'une sous-ensemble de l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus,

- La fonction nulle 0 est paire.
- Soient f et g dans F, ainsi que $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, alors
$$(\lambda f+\mu g)(-x)=\lambda f(-x)+\mu g(-x)=\lambda f(x)+\mu g(x)=(\lambda f+\mu g)(x),$$
ce qui prouve que $(\lambda f+\mu g)\in F$. Ainsi F est stable par combinaison linéaire.

Ces deux points prouvent que F est un sous-espace vectoriel de E, c'est en particulier un espace vectoriel.

3. **a.** Cette famille de polynômes est de degrés échelonnés, elle est donc libre.

b. La famille n'est pas de degrés échelonnés. On montre donc à la main qu'elle est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\alpha(X^2 + X) + \beta(X^2 + 1) + \gamma(X + 1) = 0.$$

On a alors

$$(\alpha + \beta)X^2 + (\alpha + \gamma)X + \beta + \gamma = 0$$

Or un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients le sont, on a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{array} \right. .$$

Une résolution rapide de ce système conduit à $\alpha = \beta = \gamma = 0$, et donc la famille est libre.