10 janvier 2025

D.S. n°5

<u>Exercice 1 :</u> **(6 points)**

On considère les trois suites réelles définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n + 4z_n \\ y_{n+1} = \phantom{2x_n + {}} 2y_n + 5z_n \,, \forall n \in \mathbb{N} \\ z_{n+1} = \phantom{2x_n + 3y_n + {}} 2z_n \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1) Traduire le problème sous forme matricielle, par la relation $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera les coefficients.
2) Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
3) Déterminer pour tout entier naturel n, la matrice A^n.
4) En déduire l'expression de X_n.

<u>Exercice 2 :</u> **(14 points)**

<u>Partie I :</u> (3 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$

1) Etudier la parité de la fonction f.
2) Montrer que :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[\,, \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan}\,(x) \leq x$$

3) En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 par une valeur que l'on précisera.

<u>Partie II :</u> (6 points)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{Arctan(x)}{x} & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$.

1) Dériver la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) En utilisant le résultat de la question **Q.I.2**, en déduire les variations de g.
3) En déduire que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un ensemble J à préciser.
4) Justifier que g^{-1} est dérivable sur $]0\,;1[$.
5) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

<u>Partie III :</u> (5 points)

Soit $G :\ x \longmapsto \int_0^x g(\text{t})dt$

1) Montrer que G est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2) En utilisant la question **Q.II.2**, montrer que : $\frac{\pi}{3} \leq G(\sqrt{3}) \leq \sqrt{3}$
3) Montrer que : $\forall\, x \in \left[\sqrt{3}\,;+\infty\right[\,,\ \frac{1}{x} \leq \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$
4) En utilisant les questions **III.2-III.3** et la relation de Chasles, montrer que :

$$\forall\, x \in \left[\sqrt{3}\,;+\infty\right[\,, \qquad \frac{\pi}{3} + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \leq \mathrm{G}(x)$$

5) Déterminer la limite de $\mathrm{G}(x)$ quand x tend vers $+\infty$.