DST 5
Partie 1

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Matrices et inversions. Les deux questions sont indépendantes

1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et l'inverser.

2. Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer AB et AC. En déduire que la matrice A n'est pas inversible.

b. Déterminer toutes les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0$.

Correction :

1. (3pts, dont 0.5 pour justifier que M est inversible)

Après méthode de votre choix : $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. (0.5 pour les calculs, 1 pour dire A non inversible)

On trouve après calculs : $AB = AC$. Par l'absurde, si A était inversible, on aurait

$$AB = AC \iff A^{-1}AB = A^{-1}AC \iff B = C,$$

ce qui est faux. Donc A est non inversible.

3. (1.5 point)

On cherche M sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Après calculs :

$$AM = 0 \iff \begin{cases} a = b = c = 0 \\ d + g = 0 \\ e + h = 0 \\ f + i = 0 \\ 3a + d + g = 0 \\ 3b + e + h = 0 \\ 3c + f + i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b = c = 0 \\ d = -g \\ e = -h \\ f = -i \end{cases}$$

Ainsi, les solutions sont les matrices de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & -h & -i \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad (g,h,i) \in \mathbb{R}^3$$

Exercice 2 - Deux calcus de limite « à la lycéenne ».

1. Déterminer, si elle existe, la limite de $x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$.

2. **a.** Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\sin(\frac{x}{2})$.

b. En déduire, si elle existe, la limite de $x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ en 0.

Correction :

1. (2 pts : 1 pour la technique du conjugué et 1 pour la conclusion))
A ce stade de l'année, on est obligé de recourir à la technique du conjugué :

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}) \times \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$$

On factorise en bas par $\sqrt{x}$:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}$$

On déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}.$$

2. **a.** (1 pt)
C'est du cours :

$$\cos(x) = \cos(2 \times \frac{x}{2}) = 1 - 2\sin(\frac{x}{2})^2$$

b. (1 pts)
On utilise la question précédente :

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{-2\sin(\frac{x}{2})^2}{x^2}.$$

Or on sait que $\lim_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$, par limite du taux d'accroissement. On s'y ramène :

$$\frac{-2\sin(\frac{x}{2})^2}{x^2} = \frac{-2\sin(\frac{x}{2})^2}{4 \times \frac{x^2}{4}} = -\frac{1}{2} \times \frac{\sin(x/2)^2}{(x/2)^2}$$

On déduit la limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Avec les DL, ce résultat sera très facile à prouver.

Exercice 3 - Etude d'une suite implicite.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et
$$f_n : x \longmapsto (x-1)^n + x^2 + \frac{1}{n} - 2.$$

1. Justifier que f_n admet une unique racine sur $[1;+\infty[$, c'est-à-dire une unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$, que l'on notera u_n.

2. Calculer u_1 et u_2.

3. Justifier que $u_n \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.

4. En utilisant l'expression de $f_n(u_n)$, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad f_{n+1}(u_n) = \big((u_n-1)^{n+1} - (u_n-1)^n\big) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right).$$

5. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

6. Comparer $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$.

7. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

8. En déduire la convergence de la suite (u_n).

9. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(u_n-1)^n = 0$.

10. Déterminer la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

<u>Correction</u> :

1. (2pts)
La fonction f_n est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ comme somme de fonctions strictement croissantes (ou par calcul de dérivée). De plus elle est continue sur$[1,+\infty[$.
On a aussi :
$$\forall n \geqslant 1 : \quad \begin{cases} f_n(1) = -1 + \frac{1}{n} \leqslant 0 \\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \end{cases}$$
Ainsi, f_n est une bijection de $[1,+\infty[$ dans $[-1+\frac{1}{n},+\infty[$, et puisque $0 \in [-1+\frac{1}{n},+\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution.

2. (1pt)
On sait que u_1 est solution de :
$$f_1(x) = 0 \iff x - 1 + x^2 + 1 - 2 = 0 \iff x = -2 \text{ ou } x = 1 \text{ après calculs,}$$
et puisque $u_1 \in [1,+\infty[$, on déduit : $u_1 = 1$.
On montre de même : $u_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

3. (1pt)
On calcule $f_n(\frac{3}{2})$:
$$f_n(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2}-1)^n + \frac{9}{4} + \frac{1}{n} - 2 = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n} > 0$$
Comme on a déjà remarqué que $f_n(1) \leqslant 0$, cela assure que $u_n \in [1, \frac{3}{2}]$.

4. (1pt)
On utilise que $f_n(u_n) = 0$:
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad f_{n+1}(u_n) &= f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \\ &= (u_n-1)^{n+1} + u_n^2 + \frac{1}{n+1} - 2 - \left((u_n-1)^n + u_n^2 + \frac{1}{n} - 2\right) \\ &= (u_n-1)^{n+1} - (u_n-1)^n + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$
On pouvait aussi isoler u_n^2 en écrivant $f_n(u_n) = 0$ et le substituer dans $f_{n+1}(u_n)$.

5. (1pt)
Puisque $u_n \in [1, \frac{3}{2}]$, on a
$$0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2},$$
et donc :
$$(u_n-1)^{n+1} < (u_n-1)^n \iff (u_n-1)^{n+1} - (u_n-1)^n < 0$$
D'autre part, on a aussi : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ et donc : $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$. En utilisant la question précédente, on déduit : $f_{n+1}(u_n) < 0$

6. (0.5 pt)
Puisque $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on déduit en utilisant la question précédente.

$$f_{n+1}(u_n) < 0 \iff f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$$

7. (0.5+0.5 pour quelques mots pour « enlever f_{n+1} »)
On vient de montrer que $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. Or f_{n+1} est une fonction croissante. Si on avait $u_n \geqslant u_{n+1}$, en appliquant f_{n+1}, on aurait une contradiction. Donc : $u_n < u_{n+1}$, et la suite (u_n) est croissante (et même strictement croissante).

8. (0.5pt)
La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

9. (1pt)
Comme on l'a vu ci-dessus, puisque $u_n \in [1, \frac{3}{2}]$, on a

$$0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2},$$

et donc :

$$0 \leqslant (u_n - 1)^n \leqslant \frac{1}{2^n},$$

or on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et donc par encadrement : $\lim_{n\to+\infty}(u_n - 1)^n = 0$.

10. (1pt voire plus, peu traité)
Notons $\ell \in [1, \frac{3}{2}]$ la limite de la suite (u_n). On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ (u_n - 1)^n + u_n^2 + \frac{1}{n} - 2 = 0$$

En passant à la limite $n \to +\infty$, et en utilisant la question précédente :

$$\ell^2 - 2 = 0,$$

et donc $\ell = \pm\sqrt{2}$. Or $\ell \geqslant 1$, donc $\ell = \sqrt{2}$.

Exercice 4 - Deux propriétés des fonctions périodiques.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et continue, de période $T > 0$.

1. Justifier que la fonction f est bornée sur l'intervalle $[0, T]$. En déduire qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose de plus que la fonction f a une limite finie ℓ en $+\infty$.

- **a.** Donner la définition de : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
- **b.** On suppose que f prend au moins deux valeurs disctinctes sur $[0, T]$: il existe deux réels $x_1 \in [0, T]$ et $x_2 \in [0, T]$ tels que $f(x_1) \neq f(x_2)$. En appliquant la définition précédente avec $\varepsilon = \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{3}$, aboutir à une contradiction.
- **c.** Qu'en déduire concernant les fonctions pérodiques qui tendent vers une limite finie en $+\infty$?

Correction :

1. (1.5 pts, Tout blabla sans nom précis de propriétés ou de théorèmes ne rapportaient rien).
La fonction f est <u>continue</u> sur le <u>segment</u> $[0, T]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle y est bornée (et atteint ses bornes, ce qui n'est pas la question).
Puisqu'elle est périodique, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \ f([nT, nT + T] = f([0, T]) \quad \text{et} \quad \text{donc} \ \ f(\mathbb{R}) = f([0, T])$$

Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose de plus que la fonction f a une limite finie ℓ en $+\infty$.

- **a.** (1pt)
  Voir cours :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, \ x \geqslant M \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

b. (2 pts).

L'idée est proche de la preuve de l'unicité de la limite. Soit $\varepsilon = \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{3}$ et M le réel donné à la question précédente. Soit $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $x_1 + k_1 T \geqslant M$ et $x_2 + k_1 T \geqslant M$. Par périodicité, on a $f(x_1) = f(x_1 + k_1 T)$ et $f(x_2) = f(x_1 + k_1 T)$, donc on a

$$\begin{cases} |f(x_1 - \ell| \leqslant \varepsilon \\ |f(x_2 - \ell| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Mais alors :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - \ell + \ell - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - \ell| + |f(x_2 - \ell| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}|f(x_1 - f(x_2)|,$$

ce qui est absurde

c. (1 pt).

On déduit de la question précédentes que les fonctions pérodiques qui tendent vers une limite finie en $+\infty$ sont les fonctions constantes (petite justification attendue en reprenant la question précédente).