DST 4-Corrigé exo 5

Soit la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \;\; x > 0 \\ 0 \quad \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. **a.** Sur $]-\infty, 0[$, la fonction est constante, elle est donc C^∞. Sur $]0, +\infty[$, on sait que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est C^∞, ainsi que $x \mapsto e^x$, et donc $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est C^∞ sur $]0, +\infty[$, comme composée. Finalement, puisque $x \mapsto (x+1)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors f est C^∞ sur $]0, +\infty[$ par produit. On a de plus :
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{x}} + (x+1) \times \frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

b. Calculons les limites à gauche et à droite de f en 0. On a
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$
puisque $f = 0$ sur $]-\infty, 0[$.
Par ailleurs, on a
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} (x+1) = 1 \end{cases}$$
et donc par produit
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$
Ainsi :
$$f(0) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x),$$
ce qui prouve que f est continue en 0.

c. Déjà, f est constante sur $]-\infty, 0]$. Ensuite, on a
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} > 0$$
ce qui prouve que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (et même sur $[0, +\infty[$).

d. On forme le taux d'accroissement pour $x \neq 0$:
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \quad \text{car } f(0) = 0.$$
On cherche sa limite en 0. Pour $x < 0$, on a $\frac{f(x)}{x} = 0$ et donc
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0.$$
On doit donc traiter la limite en 0^+. On a
$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} = (1 + \frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}.$$
On a déjà vu que
$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0,$$

de plus
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0 \text{ par croissance comparée.}$$
Ainsi, par somme de limites, on a
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = 0$$
Finalement, on a
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0,$$
ce qui prouve que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.

2. **a.** Contrairement aux apparences, ce n'est pas une forme indeterminée ! On a
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1,\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty\end{cases}$$
et donc par produit
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

b. Commençons par former $f(x) - x$: on a
$$\forall x > 0,\quad f(x) - x = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} - x = x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) + e^{-\frac{1}{x}}.$$
On connait déja la limite du second terme : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$, voir ci-dessus. Travaillons sur le premier terme, qui est une forme indeterminée. On écrit
$$x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) = \frac{1}{u}(e^{-u} - 1) = \frac{e^{-u} - 1}{u} \quad \text{avec } u = \frac{1}{x}.$$
On cherche la limite quand $u \to 0$. Il s'agit d'un taux d'accroissement pour la fonction $h : u \mapsto e^{-u}$, et on a donc
$$\lim_{u\to 0}\frac{e^{-u} - 1}{u} = h'(0) = -1.$$
Finalement, par somme de limites,
$$\lim_{x\to 0}(f(x) - x) = -1 + 1 = 0.$$
Remarque : On dira au second semestre que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f.

c. Puisque la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a pour $u > 0$:
$$\exists c \in]0, u[,\quad g(u) - g(0) = (u - 0)g'(c)$$
Or on a
$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = -te^{-t}.$$
Ainsi :
$$\exists c \in]0, u[,\quad g(u) - 1 = -ce^{-c}u.$$

d. On exploite la question précédente : avec les mêmes notations, on a clairement
$$-ce^{-c}u < 0$$
et donc
$$g(u) - 1 < 0.$$
d'un autre côté, on a
$$c > 0 \implies e^{-c} < 1 \implies ce^{-c} < c < u \implies -ce^{-c}u \geqslant -u^2$$
et donc
$$-u^2 \leqslant g(u) - 1.$$
Finalement, en combinant les deux inégalités, et avec la définition de g :
$$\forall u > 0,\quad -u^2 \leqslant (1+u)e^{-u} - 1 \leqslant 0,$$
(la preuve montre même que l'inégalité est stricte). L'inégalité étant par ailleurs bien vérifiée lorsque $u = 0$, on obtient le résultat demandé.

e. Soit $x > 0$, on utilise l'inégalité précédente avec $u = \frac{1}{x} > 0$. On obtient

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, \quad & -\frac{1}{x^2} \leqslant (1+\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} - 1 \leqslant 0 \\
& \iff 1 - \frac{1}{x^2} \leqslant (1+\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} \leqslant 1 \\
& \iff x - \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant x \quad \text{en mulipliant par } x > 0
\end{aligned}$$