

$$1) \underline{\arccos(1) = 0} ; \underline{\arccos(-1) = \pi}$$

$\arccos$ n'est pas paire sur $[-1; 1]$ car $\arccos(1) \neq \arccos(-1)$

Rem: une réciproque ne peut être paire! (Voyez-vous pourquoi?)

$$2) \underline{\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x)}$$

$$3) \forall x \in [-1; 1]$$

$$\underline{\cos(\pi - \arccos(-x))} \stackrel{Q2}{=} -\cos(\arccos(-x)) \stackrel{\text{parité de } \cos}{=} -\cos(\arccos(-x)) = -(-x) = x$$

Or

$$\forall x \in [-1; 1], \quad 0 \leq \arccos(-x) \leq \pi$$

d'où

$$\forall x \in [-1; 1], \quad 0 \leq \pi - \arccos(-x) \leq \pi$$

Or, sur $[0; \pi]$, $\arccos$ est la réciproque de $\cos$

d'où

$$\forall x \in [-1; 1], \quad \arccos(\cos(\pi - \arccos(-x))) = \arccos(x)$$

d'où

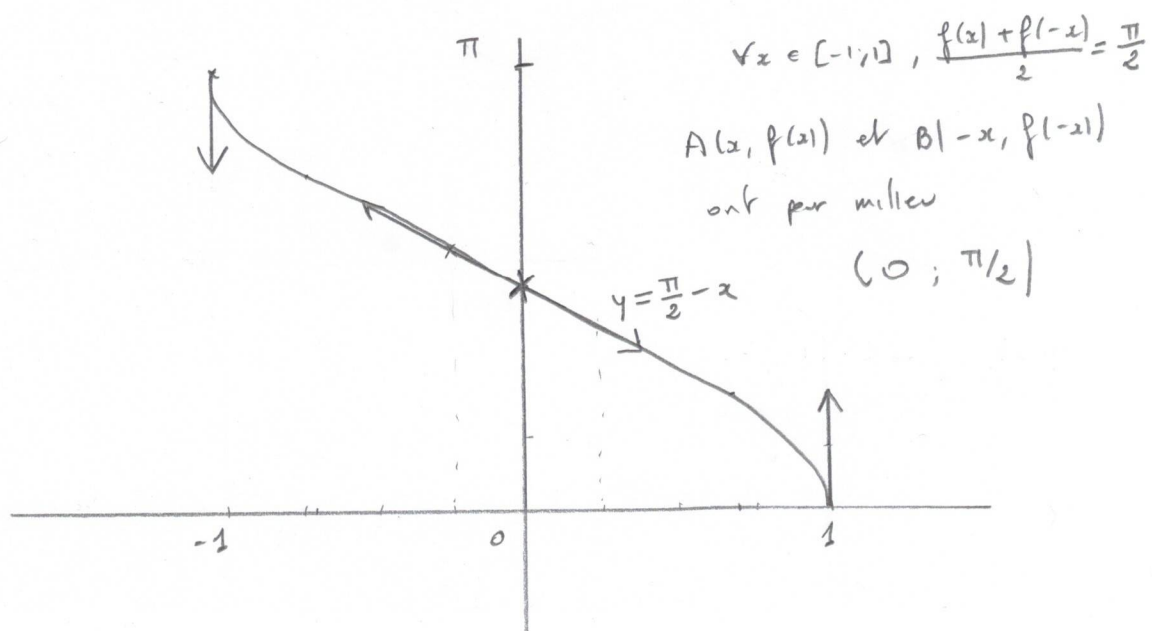
$$\forall x \in [-1; 1], \quad \pi - \arccos(-x) = \arccos(x)$$

d'où

$$\forall x \in [-1; 1], \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$$

d'où graphiquement, symétrie centrale du graphe par rapport au point $(0; \pi/2)$

Dessin



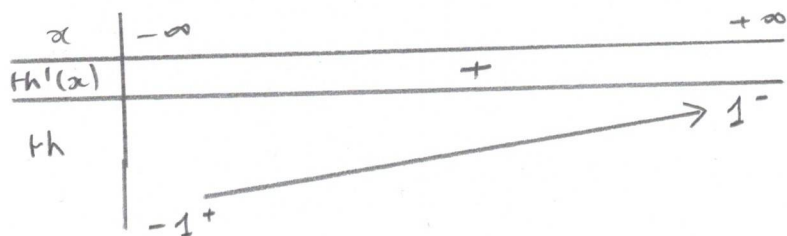
ea

$$1) \quad \text{th}' : x \mapsto \frac{\text{ch}(x)\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)}$$

d'où

$$\text{th}' : x \mapsto \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1 \end{array} \right.$$



$$2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(x) \in]-1; 1[$$

Donc $x \mapsto \text{Arccos}(\text{th}(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$ et n'est dérivable sur $\mathbb{R}$
(car les points de non dérivabilité de Arccos ne sont pas atteints par th)

$$3) \quad g' : x \mapsto \frac{\text{ch}(x)}{1 + \text{sh}^2(x)} + \frac{-\frac{1}{\text{ch}^2(x)}}{\sqrt{1 - \text{th}^2(x)}}$$

Or,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + \text{sh}^2(x) = \text{ch}^2(x) \geq 1 > 0 \quad \text{et}$$
$$1 - \text{th}^2(x) = 1 - \frac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$$

d'où

$$g' : x \mapsto \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} - \frac{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}}{\sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}}}$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) \geq 1 > 0$$

$$g' : x \mapsto \frac{1}{\text{ch}(x)} - \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{\text{ch}(x)}{1}$$

$$g' : x \mapsto 0$$

d'où g est constante sur $\mathbb{R}$

$$\text{Or, } g(0) = \text{Arctan}(\text{sh}(0)) + \text{Arccos}(\text{th}(0)) = \text{Arctan}(0) + \text{Arccos}(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d'où } \underline{g : x \mapsto \pi/2}$$

ex

Remarquons que si il existe une sol, elle est positive $\because$
Raisonnons par Analyse et Synthèse.

Analyse

Supposons qu'il existe une sol

Alors

$$\tan(\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x)) = \tan(\pi/4)$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{1 - 6x^2} = 1$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6(x+1)(x - \frac{1}{6}) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x = -1 \text{ ou } x = 1/6}$$

Synthèse

- $\forall x \leq 0$, $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) \leq 0 + 0 < \pi/4$
Donc, -1 n'est pas sol

- Soit $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x)$ continue sur $\mathbb{R}_+$

$$g(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pi$$

$$\pi/4 \in [0; \pi[$$

D'après T.V.I, il existe au moins une sol
(sa tombe bien, on n'a qu'un "candidat sol")

Donc

$$\underline{S = \left\{ \frac{1}{6} \right\}}$$

Vous venez de retrouver la formule de type Machin (appelée
f d' Euler)

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \pi/4$$

Bravo!

ca: Soit $f: x \mapsto \frac{3x+2}{x+4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
 $u_0 = 0$

1) Mq par recurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(P_n): "u_n > 0"$

I: $u_1 = f(u_0) = \frac{2}{4} > 0$. (P_0) vraie

H: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. supp (P_n) vraie et mq (P_{n+1}) vraie

(HR): $u_n > 0$, d'où $\begin{cases} 3u_n + 2 > 2 \\ u_n + 4 > 4 \end{cases}$, d'où $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} > 0$

la prop est hereditaire

$\subseteq$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

la suite est bien définie, car

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} \geq 4 > 0$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - 1}{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} = \frac{2}{5} \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{2}{5} v_n$$

D'où, (v_n) géom de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{2}$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow (u_n + 2)v_n = u_n - 1$
 $\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1$
 $\Leftrightarrow u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{-1}{-1} = 1$

ex

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\bullet S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

D'où $(S_{2n}) \nearrow$

somme
télescopique

$$\bullet S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \\ = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$$

D'où

$(S_{2n+1}) \searrow$

$$\bullet S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

Donc, $\left. \begin{array}{l} (S_{2n}) \nearrow \\ (S_{2n+1}) \searrow \\ (S_{2n+1} - S_{2n}) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{D'où } (S_{2n}) \text{ et } (S_{2n+1}) \\ \text{sont adjacentes} \end{array}$

On en déduit que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite

qui est... En (2) évidemment ☺ à pas

ex soit la matrice augmentée associée au système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & m+1 & m+3 & m+1 \\ 2 & m+3 & 6 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & m-1 & m & m-1 \\ 0 & m-1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & m-1 & m & m-1 \\ 0 & 0 & -m & -m \end{array} \right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

si $m=0$

le système associé s'écrit

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ -y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = 1 \\ z = z \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -3z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ droite de l'espace}$$

si $m=1$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ z = 0 \\ -z = -1 \end{cases}$$

$$S = \emptyset \quad (z=0 \neq 1)$$

Rem : on voit

$$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \text{ strict}$$

si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ (m-1)y + mz = m-1 \\ -mz = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{2}{m-1} + 3 = 2 \\ y = -\frac{1}{m-1} \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-m+3}{m-1} \\ y = -\frac{1}{m-1} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-m+3}{m-1} \\ -\frac{1}{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

point de l'espace.

DST 4

24/

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Une identité pour arccos.

- 3 x 9,5 = 1,5
- Donner $\text{Arccos}(1)$ et $\text{Arccos}(-1)$. La fonction Arccos est-elle paire ?
 - Rappeler $\cos(\pi - X)$.
 - Calculer $\cos(\pi - \text{Arccos}(-x))$. En déduire une relation entre $\text{Arccos}(-x)$ et $\text{Arccos}(x)$. Commenter avec le graphe de la fonction Arccos .

0,5
1
1
4,5

Exercice 2 - Une identité trigo-hyperbolique.

Soit la fonction $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\text{th} : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

- 0,5 + 9,5
- Montrer que $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2}$, et établir le tableau de variation de th .
 - ~~Il est facile que th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la bijection réciproque.~~
 - Justifier que la fonction $g : x \mapsto \text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x))$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
 - Calculer g' , et en déduire une expression simple de g .

0,5
1
9,5
3

Exercice 3 - Une équation avec arctan.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$.

2 anal. (ben)
2 synth
4

Exercice 4 - Une suite homographique. Soit la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$ et $u_0 = 0$.

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$, et que la suite est bien définie.
2. On introduit la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, et préciser sa raison.
3. En déduire une expression explicite de (u_n) , ainsi que sa limite.

Exercice 5 - Somme harmonique alternée.

Soit la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Qu'en déduire ?

Exercice 6 - Un système à paramètre.

Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre réel m :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + (m+1)y + (m+3)z = m+1 \\ 2x + (m+3)y + 6z = 3 \end{cases}$$