DST 4

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Une identité pour arccos.

1. Donner $\mathrm{Arccos}(1)$ et $\mathrm{Arccos}(-1)$. La fonction Arccos est-elle paire ?
2. Rappeler $\cos(\pi - X)$.
3. Calculer $\cos(\pi - \mathrm{Arccos}(-x))$. En déduire une relation entre $\mathrm{Arccos}(-x)$ et $\mathrm{Arccos}(x)$. Commenter avec le graphe de la fonction Arccos.

Exercice 2 - Une identité trigo-hyperbolique.

Soit la fonction $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{th} : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

1. Montrer que $\mathrm{th}' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$, et établir le tableau de variation de th.
2. Il en résulte que th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la bijection réciproque.
3. Justfier que la fonction $g : x \mapsto \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x)) + \mathrm{Arccos}(\mathrm{th}(x))$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer g', et en déduire une expression simple de g.

Exercice 3 - Une équation avec arctan.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{Arctan}(2x) + \mathrm{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4 - Une suite homographique. Soit la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$ et $u_0 = 0$.

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$, et que la suite est bien définie.
2. On introduit la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, et préciser sa raison.
3. En déduire une expression explicite de (u_n), ainsi que sa limite.

Exercice 5 - Somme harmonique alternée.

Soit la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Qu'en déduire ?

Exercice 6 - Un système à paramètre.

Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre réel m :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + (m+1)y + (m+3)z = m+1 \\ 2x + (m+3)y + 6z = 3 \end{cases}$$