1) $m = 2$

Soit la mat associée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 6 & -4 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Soit le système associé

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = 1 \\ 2z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & -1 \\ m & 1 & m & -1 \\ m^2 & m & 2m^2-m & -m^2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & -1 \\ 0 & 1-m^2 & m-m^2 & m-1 \\ 0 & m(1-m^2) & -m^3+2m^2-m & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & -1 \\ 0 & 1-m^2 & m-m^2 & m-1 \\ 0 & 0 & m^2-m & -m^2+m \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & -1 \\ 0 & (1-m)(1+m) & m(1-m) & +(m-1) \\ 0 & 0 & m(m-1) & -m(m-1) \end{array}\right)$$

Disjonction des cas

- si $m=0$

$$\begin{cases} x \quad = -1 \\ y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$ droite ds $\mathbb{R}^3$

- si $m=1$

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} ; \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} -1-y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

plan ds $\mathbb{R}^3$

si $m=-1$

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ -2z = -2 \\ +2z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y-z=-1 \\ z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$; incompatible $S = \emptyset$

si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$$\begin{cases} x + my - m = -1 \\ (1-m)(1+m)y - m(1-m) = m-1 \\ z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1+m - m\frac{m-1}{m+1} \\ y = \frac{m-1}{m+1} \\ z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{m-1}{m+1} \\ y = \frac{m-1}{m+1} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{m-1}{m+1} \\ (m-1)/(m+1) \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$ point de $\mathbb{R}^3$

ex2

1) $\forall\, t > 0,\ \dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$

d'où, une primitive F de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$F : t \longmapsto \ln(t) - \ln(t+1)$

$F : t \longmapsto \ln\left(\dfrac{t}{t+1}\right)$

2) Sol éq homogène

Soit $a : x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$; $A : x \mapsto \ln(e^x+2)$ une primitive de a sur $\mathbb{R}$

$y_H : x \longmapsto \lambda e^{-\ln(e^x+2)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $y_H : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{e^x+2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Sol part

Utilisons la méthode de la variation de la constante.

Soit $y_P : x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{e^x+2}$

y_P sol $\iff \dfrac{\lambda'(x)}{e^x+2} = \dfrac{1}{(e^x+2)(e^x+1)}$

$\iff \lambda'(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$

Cherchons une primitive sur $\mathbb{R}$ par chg^t de variable

$\begin{cases} u = e^t \\ du = u\,dt \end{cases}$; $\displaystyle\int^x \frac{1}{e^t+1}\,dt = \int^{e^x} \frac{1}{u+1}\,\frac{1}{u}\,du = \int^{e^x} \frac{1}{u(u+1)}\,du$

$\overset{q1}{=} \left[\ln\left(\dfrac{u}{u+1}\right)\right]^{e^x} = \left[\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)\right]$

d'où

$y_P : x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+2}\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+2}\right)$

Sol générale

$y : x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+2}\left(\lambda + \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+2}\right)\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

ex 3

1) $\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^4 - 4t^2 + 13 = (t^2-2)^2 + 9 \geq 9 > 0$

Donc, F bien définie sur $\mathbb{R}$ comme la primitive de f continue sur $\mathbb{R}$ d'après le Théo Fondamental de l'Analyse.

2) Chgt var
$\begin{cases} u = t^2 \\ du = 2t\,dt \end{cases}$; soit $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_2^{x^2} \frac{1}{u^2 - 4u + 13}\,du = \int_2^{x^2} \frac{1}{(u-2)^2+9}\,du$$

d'où

$$F(x) = \frac{1}{9}\int_2^{x^2} \frac{1}{1+\left(\frac{u-2}{3}\right)^2}\,du = \left[\frac{1}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{u-2}{3}\right)\right]_2^{x^2} = \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x^2-2}{3}\right)$$

ex 4 soit $x > 0$

I) 1) $f \in \mathcal{C}^1([0,x], \mathbb{R})$; $f' : t \mapsto te^t$; $f(0) = -1$

D'après T.A.F

$\exists\, c \in]0,x[\;\; | \;\; f(x) - f(0) = ce^c(x-0) \iff f(x) + 1 = ce^c(x-0)$

2) $0 < c < x$ et $t \mapsto te^t$ fct clairt croissante sur $[0,x]$

D'où

$$0 = 0e^0 x \leq ce^c x \leq xe^x x = x^2 e^x$$

D'où

$\forall x > 0, \quad 0 \leq f(x) + 1 \leq x^2 e^x$

II) 1) g continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (différence et quotient)

Reste à étudier en 0

$\lim\limits_0 \frac{e^x - 1}{x - 0} = e^0 = 1$ (nb dérivé de la fct expo en 0)

d'où $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1 - 1 = 0 = g(0)$

Donc g continue en 0 et sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc g continue sur $\mathbb{R}$.

2) $\forall x>0,\ g'(x)=\dfrac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}$

$$=\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}=\underline{\frac{f(x)+1}{x^2}}$$

3) D'après Q I.2,

$\forall x>0,\quad 0\leq f(x)+1$

et $\forall x>0,\quad x^2>0$

Donc $\underline{g' \text{ positive}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $\underline{g \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+}$

3a) • Comme la dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, la dérivée est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

• De plus, d'après Q II.2, g' minorée par 0

3b) D'où, d'après le <u>Théorème de Limite Monotone</u>,

$\underline{g' \text{ admet une limite en } 0}$

3c) D'après le <u>Théorème de la Limite de la Dérivée</u>

g est $\mathcal{C}^1$ en 0 (et par ailleurs sur $\mathbb{R}_+^*$)

Donc $\underline{g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})}$

III)

1) <u>TAF</u> sur $[0,x]$ avec la fct $h: t\mapsto e^t\in\mathcal{C}^1([0,x],\mathbb{R})$

$h': t\mapsto e^t$

$\forall t\in[0,x],\ e^0\leq h'(t)\leq e^x$

D'où

$\forall x>0,\quad 1(x-0)\leq e^x-e^0\leq e^x(x-0) \iff \underline{x\leq e^x-1\leq xe^x}$

2) Soit $x>0$

$$\underbrace{0\leq k(x)}_{\text{admis}}\ \underbrace{\leq (e^x-1-x)x}_{\text{admis}}\leq(\underbrace{e^x x}_{Q1}-x)x=x(\underline{e^x-1})x\leq x\,\underline{e^x}\,x\ \underset{Q1}{\leq}\ \underline{x^3e^x}$$

3) $\forall x>0$

$$0\leq e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\leq x^3e^x\iff \underline{\frac{x^2}{2}\leq e^x-1-x\leq\frac{x^2}{2}+x^3e^x}$$

4) $\forall x>0,\quad \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$. Or, Q3 $\quad\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\leq\dfrac{1}{2}+xe^x$

Théo encadr, $\underline{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}=g'(0)}$

I 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(P_n) : \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq \frac{\pi}{4} \right)$. Récurrence

I : $u_0 \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4} \right]$ (donnée), donc (P_0) vraie

H : Soit $n \in \mathbb{N}$, supp (P_n) et montrons (P_{n+1})

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \cos(u_n) \leq \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{\pi}{4}$$

car $\cos \searrow$ sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4} \right] \subset [0 ; \pi/2]$ car $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq \frac{\pi}{4}$

C : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq \frac{\pi}{4}$

2) Soit $f : t \mapsto t - \cos(t)$

$f' : t \mapsto 1 + \sin(t)$ strict^t positive sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4} \right]$

t	$\sqrt{2}/2$		$\pi/4$
f	$\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

$\begin{cases} f \text{ cont } \searrow\searrow \text{ de } \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4} \right] \text{ ds } f\left(\left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4} \right]\right) \\ 0 \in f\left(\left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4} \right]\right) \end{cases}$

D'où d'après le Théo de la Bijection

$\exists ! \, \ell \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4} \right] \, / \, f(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = \cos(\ell)$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$

Soit $g : t \mapsto \cos(t)$; $g' : t \mapsto -\sin(t)$

$\forall t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4} \right]$, $|g'(t)| = \sin(t) \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Or, $(u_n, \ell) \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4} \right]^2$

D'après l'Inégalité des Acc^{ts} finis

$$|u_{n+1} - \ell| = |g(u_n) - g(\ell)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n - \ell|$$

4) Rec évidente ou Π télescopique

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n |u_0 - \ell| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

5) $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ suite géom de raison $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [0, 1]$, donc cv vers 0

D'où (u_n) cv vers ℓ.

II) 1) 2 réponses possibles :

* Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, les A.F donneraient $|u_{n+1} - \ell| \leq |u_n - \ell|$
et donc pas de contraction (« adios la cv démontrée »)

* « Pas grave », car après qq termes calculés, on a
$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, u_{n_0} \in [\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}]$ (faire un graphique) et on a la cv.

2) Idem

Bonus

1) (v_n) et (w_n) respectivt suite extraite des termes pairs et impairs de (u_n)

2) Comme (u_n) cv, par caract séquentielle
(v_n) et (w_n) cv vers la m̂ limite ℓ