

I. 1) $\underline{P(1) = 2 - 3 + 1 = 0}$

$$\begin{aligned} 2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) &= x(2x^3 - 3x^2 + 1) \\ &= x(x-1)(2x^2 - x - 1) \\ &= x(x-1)2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= \underline{2(x-1)^2 x \left(x + \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0$

x	$-\infty$	$-1/2$	0	1	$+\infty$
$(x-1)^2$		+	+	+	+
x	-	-	0	+	+
$(x+1/2)$	-	0	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	+	+

d'où ,

$$\underline{P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [0, +\infty[}$$

II) 1) $\underline{D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}^*}$

2) f dérivable sur D_f (quotient fcts dérivables)

d'où $f' : x \mapsto \frac{3e^{3x}(e^x - 1) - (e^{3x} - 1)e^x}{(e^x - 1)^2}$

d'où $f' : x \mapsto \frac{2e^{4x} - 3e^{3x} + e^x}{(e^x - 1)^2}$

d'où $f' : x \mapsto \frac{P(e^x)}{(e^x - 1)^2}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, P(x) \geq 0$ (I.3)

d'où

$$\forall x \in D_f, f'(x) \geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
f	1	3	$+\infty$

Rem : le « 3 » est
rattrapé en Q4.

$$4a) \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

f2

$$4b) \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{3x} - 1 = (e^x - 1)(e^{2x} + e^x + 1)$$

$$\begin{aligned} 4c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1} (e^{2x} + e^x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + e^x + 1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

4d) f peut-être prolongée par continuité en 0 par la valeur 3.

III) 1) $g': x \mapsto 2e^{2x} + e^x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$$

g continue strict⁺ croissante de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) =]1; +\infty[= J$

Donc, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ ds $]1; +\infty[$

2) $g(0) = 3$

3) g bij de $\mathbb{R}$ ds J

g dérivable sur $\mathbb{R}$

g' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

donc

g^{-1} dérivable sur J

$$4) \underline{(g^{-1})'(3)} = \frac{1}{g'(g^{-1}(3))} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{2+1} = \underline{\frac{1}{3}}$$

5) Soit $y \in]1; +\infty[$

a) Résolvons ds $\mathbb{R}$

$$g(x) = y \Leftrightarrow e^{2x} + e^x + 1 = y \Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x + 1 - y = 0$$

soit $X = e^x$. Résolvons ds $]0; +\infty[$

$$X^2 + X + 1 - y = 0. \quad \Delta = 4y - 3 > 0 \quad (\text{car } y > 1)$$

$$X_1 = \frac{-1 - \sqrt{4y-3}}{2} < 0; \quad X_2 = \frac{-1 + \sqrt{4y-3}}{2}$$

$$\text{d'où } \underline{x = \ln\left(\frac{-1 + \sqrt{4y-3}}{2}\right)}$$

Remarque

- on sait que g bij.
- X_1 ne convient pas
- Donc, pas utile de vérifier que X_2 convient !

b) $g^{-1}: x \mapsto \ln\left(\frac{-1 + \sqrt{4y-3}}{2}\right)$

1a) $f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z^3} = 1 \Leftrightarrow z^3 = 1$. $S = \{1, j, j^2\}$

1b) Résolvons ds $\mathbb{C}^*$,

$$f(z) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{z^3} = -1 \Leftrightarrow z^3 = -1 \Leftrightarrow z^3 = e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1 \\ 3\arg(z) = \pi \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi/3] \end{cases}$$

$$S = \left\{ e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \right\} = f^{-1}(\{1\})$$

2a) $f(z) = i \Leftrightarrow \frac{1}{z^3} = i \Leftrightarrow z^3 = \frac{1}{i} \Leftrightarrow z^3 = -i \Leftrightarrow z^3 = e^{-i\pi/2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1 \\ 3\arg(z) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = -\frac{\pi}{6} \quad [\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$$

2b) $S = \left\{ e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \right\} = f^{-1}(\{i\})$

3) $f(1) = f(j) = 1$ (Q1)

Donc f non injective de $\mathbb{C}^*$ ds $\mathbb{C}^*$

4) Soit $y \in \mathbb{C}^*$

Réolvons ds $\mathbb{C}^*$,

$$\frac{1}{z^3} = y \Leftrightarrow z^3 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow z^3 = \frac{1}{|y| e^{i\arg(y)}} \Leftrightarrow z^3 = \frac{1}{|y|} e^{-i\arg(y)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = \frac{1}{|y|} \\ 3\arg(z) = -\arg(y) \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \frac{1}{\sqrt[3]{|y|}} \\ \arg(z) = \frac{-\arg(y)}{3} \quad [\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{|y|}} e^{i(-\frac{\arg(y)}{3} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \right\}$$

L'eq admet 3 sol, donc au moins une

Donc f surj de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^*$ (et au passage, on retrouve non inj)

$$5) \mathcal{W} = \{ e^{i\theta}, \theta \in [0; 2\pi[\}$$

$$\forall \theta \in [0; 2\pi[, f(e^{i\theta}) = \frac{1}{(e^{i\theta})^3} = e^{-i3\theta}$$

D'où $f(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ (c'est 3x le cercle parcouru ds le sens inverse trigon ☺)

$$6) a) \text{ Soit } z = r e^{i\theta}, \text{ où } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) [2\pi]$$

$$\underline{f(z) = \frac{1}{(r e^{i\theta})^3} = \frac{1}{r^3} e^{-i3\theta}}$$

$$6b) f(z) \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow (\sin(-3\theta) = 0 \text{ et } \cos(-3\theta) > 0)$$

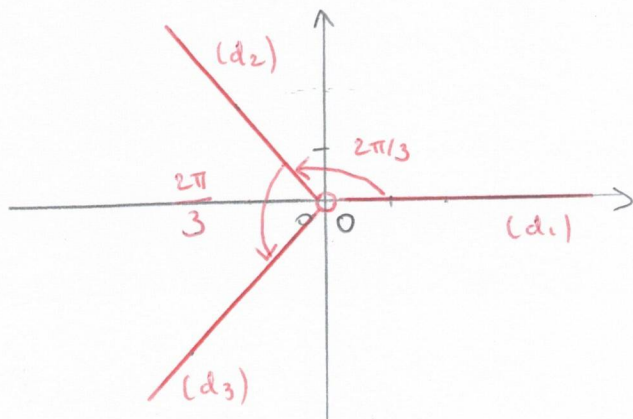
$$\Leftrightarrow -3\theta = 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{0}{-3} [-2\pi/3]$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 [-\frac{2\pi}{3}]$$

$$\underline{\Leftrightarrow \theta = 0 [\frac{2\pi}{3}]}$$

6c)



$f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est l'union de 3 demi-droites

"

$$\underline{d_1 \cup d_2 \cup d_3} \quad \text{où}$$

$$d_1 = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0 \}$$

$$d_2 =]0A) \quad \text{où } O \text{ origine et } A \text{ pour s'affixe } e^{i2\pi/3}$$

$$d_3 =]0B) \quad \text{pour s'affixe } e^{i4\pi/3}$$

ex3

f5

1 a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$(k+1) \binom{n+1}{k+1} = (k+1) \frac{(n+1)!}{(k+1)! (n+1-k-1)!} = \frac{(n+1)n!}{k! (n-k)!} = (n+1) \binom{n}{k}$$

1 b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$S_n \stackrel{Q1a}{=} \sum_{k=0}^n (n+1) \binom{n}{k} = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (n+1) 2^n$$

f. binôme

2) a) Décomposition en éléments simples

$$a = 2, \quad b = -5; \quad c = 3$$

b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$T_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+1} \right) + \sum_{k=2}^n \left(\frac{3}{k+2} - \frac{3}{k+1} \right); \quad \text{en écrivant } -5 = -2-3$$

Donc, par double sommes télescopiques

$$T_n = \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{2} - \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) + \left(\frac{3}{n+2} - \frac{3}{3} \right)$$

Donc

$$T_n = 2 + \frac{3}{n+2} - \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 5/3$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i^2}{j+1} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^j i^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \frac{j(j+1)(2j+1)}{6}$$

Donc

$$U_n = \sum_{j=1}^n \frac{2j^2 + j}{6} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n j = \frac{1}{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6} \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc

$$U_n = \frac{n(n+1)}{36} (4n+2+3) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{36}$$

Une rédaction claire, rigoureuse, soignée est une condition nécessaire à la réussite.

Exercice 1 :

14

Partie 1 :

Soit la fonction polynomiale $P : x \mapsto 2x^4 - 3x^3 + x$

0,5 1) Calculer $P(1)$.

1,5 2) Factoriser « au maximum » P .

1,5 div 0,5 par $x-1$

1 3) En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

3

Partie 2 :

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}$

0,5 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f , noté $\mathcal{D}_f$.

2) Montrer que :

1/

$$f' : x \mapsto \frac{P(e^x)}{(e^x - 1)^2}$$

1,5 / 3) En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$ et donner (sans justification) les limites. (1 + 0,5 en a)

4) On s'intéresse à un prolongement de la fonction f au point d'abscisse 0.

0,5 a) Rappeler (sans justification) la formule de factorisation de $a^n - b^n$.

0,5 b) Utiliser cette formule avec $a = e^x$, $b = 1$ et $n = 3$.

1/ c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}$

0,5 d) Conclure quant à la possibilité du prolongement par continuité au point d'abscisse 0 ?

5,5

Partie 3 :

Soit la fonction $g : x \mapsto e^{2x} + e^x + 1$

1/ 1) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle $\mathcal{J}$ à déterminer.

0,5 2) Calculer $g(0)$.

1,5 3) Justifier que g^{-1} est dérivable sur $\mathcal{J}$. 3 x 0,5

0,5 4) Calculer $(g^{-1})'(3)$.

5) Soit $y \in \mathcal{J}$.

1,5 / a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = y$.

0,5 / b) En déduire l'expression de g^{-1} .

5,5

Exercice 2 : (10)

On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$
 $z \mapsto \frac{1}{z^3}$

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $f(z) = 1$.
 0,5 b) En déduire $f^{-1}(\{1\})$.
- 1,5 2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $f(z) = i$.
 0,5 b) En déduire $f^{-1}(\{i\})$.
- 1 3) L'application f est-elle une injective de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$?
- 2 4) Justifier que f est surjective de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$?
- 1 5) Déterminer l'image directe de $\mathbb{U}$ par l'application f .
- 6) On s'intéresse à l'image réciproque de $\mathbb{R}_+^*$.
 a) Soit $z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$.
 0,5 Exprimer $f(z)$ en fonction de r et θ .
 1,5 b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $f(z) \in \mathbb{R}_+^*$.
 0,5 c) En déduire $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 3 : (11)

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n+1}{k+1}$$

a) Montrer que :

3 $\left(\begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right.$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad (k+1) \binom{n+1}{k+1} = (n+1) \binom{n}{k}$

b) Calculer S_n

2) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On s'intéresse à la somme suivante :

$$T_n = \sum_{k=2}^n \frac{k+11}{(k-1)(k+1)(k+2)}$$

a) Déterminer les réels a, b et c tels que :

4,5 $\left(\begin{array}{l} 1,5 \\ 2,1 \\ 1 \end{array} \right.$ $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \frac{k+11}{(k-1)(k+1)(k+2)} = \frac{a}{(k-1)} + \frac{b}{(k+1)} + \frac{c}{(k+2)}$

b) Calculer T_n (on pourra observer et utiliser que : $b = -a - c$).
 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5
 b chaque

c) En déduire la limite de (T_n) quand $n \rightarrow +\infty$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

3,5 $\left(\begin{array}{l} 1 \quad \sum 1^2 \\ 0,5 + 0,5 \quad 2 + 2 \\ 1,5 \quad 4 + 5 + \dots \end{array} \right.$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j+1}$$