17 novembre 2025

D.S. n°3

Une rédaction claire, rigoureuse, soignée est une condition nécessaire à la réussite.

Exercice 1 :

Partie 1 :

Soit la fonction polynomiale $P : x \longmapsto 2x^4 - 3x^3 + x$

1) Calculer $P(1)$.

2) Factoriser « au maximum » P.

3) En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Partie 2 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, noté $\mathcal{D}_f$.

2) Montrer que :

$$f' : x \longmapsto \frac{P(e^x)}{(e^x-1)^2}$$

3) En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$ et donner (sans justification) les limites.

4) On s'intéresse à un prolongement de la fonction f au point d'abscisse 0.

- **a)** Rappeler (sans justification) la formule de factorisation de $a^n - b^n$.
- **b)** Utiliser cette formule avec $a = e^x$, $b = 1$ et $n = 3$.
- **c)** En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}$
- **d)** Conclure quant à la possibilité du prolongement par continuité au point d'abscisse 0 ?

Partie 3 :

Soit la fonction $g : x \longmapsto e^{2x} + e^x + 1$

1) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle $\mathcal{J}$ à déterminer.

2) Calculer $g(0)$.

3) Justifier que g^{-1} est dérivable sur $\mathcal{J}$.

4) Calculer $(g^{-1})'(3)$.

5) Soit $y \in \mathcal{J}$.

- **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = y$.
- **b)** En déduire l'expression de g^{-1}.

Exercice 2 :

On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Soit f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \frac{1}{z^3} \end{array}$

1) **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $f(z) = 1$.

   b) En déduire $f^{-1}(\{1\})$.

2) **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $f(z) = i$.

   b) En déduire $f^{-1}(\{i\})$.

3) L'application f est-elle une injective de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$?

4) Justifier que f est surjective de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$?

5) Déterminer l'image directe de $\mathbb{U}$ par l'application f.

6) On s'intéresse à l'image réciproque de $\mathbb{R}_+^*$.

   a) Soit $z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\theta = arg(z)\ [2\pi]$.

   Exprimer $f(z)$ en fonction de r et θ.

   b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $f(z) \in \mathbb{R}_+^*$.

   c) En déduire $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 3 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n+1}{k+1}$$

   a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0\,, n]\!], \qquad (k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$$

   b) Calculer S_n

2) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On s'intéresse à la somme suivante :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k+11}{(k-1)(k+1)(k+2)}$$

   a) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \frac{k+11}{(k-1)(k+1)(k+2)} = \frac{a}{(k-1)} + \frac{b}{(k+1)} + \frac{c}{(k+2)}$$

   b) Calculer T_n (on pourra observer et utiliser que : $b = -a - c$).

   c) En déduire la limite de (T_n) quand $n \to +\infty$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i^2}{j+1}$$