

DST 2

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Une étude de fonction.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+2x+7}$.

- Justifier qu'il est bien possible de définir cette fonction sur $\mathbb{R}$.
- Dresser son tableau de variations, et en déduire si elle admet un minimum ou un maximum, que l'on déterminera le cas échéant.
- Déterminer l'ensemble image $J = f(\mathbb{R})$. La fonction est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur J ? On justifiera la réponse.
- Justifier que la fonction $g : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+2x+7}$ est une bijection, de $[2; +\infty[$ dans un intervalle à préciser. On ne demande pas de calculer la bijection réciproque.
- Déterminer $g^{-1}(\frac{7}{22})$, puis justifier que g^{-1} est dérivable en ce point, et déterminer $(g^{-1})'(\frac{7}{22})$.

Correction :

- (0.5pt) Après une étude rapide de discriminant (ou une mise sous forme canonique), on vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2x + 7 > 0.$$

Ainsi, on peut définir f sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

- (3pt) On calcule la dérivée. Après calculs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 12}{(x^2 + 2x + 7)^2} = 2 \frac{-x^2 - x + 6}{(x^2 + 2x + 7)^2}$$

Ainsi, f' est du signe du numérateur $-x^2 - x + 6$. On trouve deux racines : -3 et 2 . Ainsi, $-x^2 - x + 6$ est du signe du coefficient dominant, sauf entre les racines. On déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

Le calcul des limites en $\pm\infty$ se fait avec une rédaction standard du lycée.

Par lecture du tableau, f possède un minimum, $-\frac{1}{2}$, et un maximum, $\frac{1}{3}$.

- (3pts) Puisque f est continue, par lecture du tableau : $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$. La fonction n'est pas une bijection : certains nombres de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$ ont plusieurs antécédants par f . Par exemple, par lecture du tableau, $y = \frac{1}{4}$ possède deux antécédants, un dans $] -3, 2[$, et un dans $] 2, +\infty[$. Il est inutile d'exhiber ces antécédants.

Remarque : Il n'était pas correct de dire que f n'est pas monotone pour conclure que f n'est pas bijective.

4. (1.5pts) La fonction g est définie comme la fonction f , mais sur l'ensemble $[2, +\infty[$ (on dira que g est la restriction de f à $[2, +\infty[$). Ainsi, g est strictement décroissante, continue, donc par lecture du tableau elle définit une bijection de $[2, +\infty[$ sur $]0, \frac{1}{3}]$.
5. (1.5pts) On cherche $x \in [2, +\infty[$ tel que $g(x) = \frac{7}{22}$. Si on ouvre l'oeil, on note que 3 convient. Sinon, on résout $\frac{2x+1}{x^2+2x+7} = \frac{7}{22}$, en passant par une équation de degré 2. Quelle que soit la méthode : $g(3) = \frac{7}{22}$ et donc $g^{-1}(\frac{7}{22}) = 3$. Puisque $g'(3) = -\frac{3}{121} \neq 0$, la fonction g^{-1} est dérivable en $\frac{7}{22}$, avec $(g^{-1})'(\frac{7}{22}) = \frac{1}{g'(\frac{7}{22})} = -\frac{121}{3}$.

Exercice 2 - Une bijection.

Soit la fonction $f : [-1; 0] \rightarrow [0; 1]$ définie par $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. On admet que f est une bijection. Déterminer la fonction réciproque f^{-1} .

Correction : (3pts) On fixe $y \in [0, 1]$, on résout :

$$\begin{aligned} y &= f(x), \text{ d'inconnue } x \in [-1, 0] \\ \iff y &= \sqrt{1-x^2} \\ \implies y^2 &= 1-x^2 \\ \iff x^2 &= 1-y^2 \\ \iff x &= -\sqrt{1-y^2} \text{ car } x \in [-1, 0] \end{aligned}$$

Attention à ne pas conclure trop vite que $x = -\sqrt{1-y^2}$ est solution ! A ce stade, à cause de l'implication, on a prouvé : si l'équation $y = f(x)$ admet une solution, on a nécessairement $x = -\sqrt{1-y^2}$; mais l'équation pourrait aussi ne pas avoir de solution

Or, on a admis que la fonction f est bijective, donc $y \in [0, 1]$ possède un antécédant $x \in [-1, 0]$, et donc il s'agit de $x = -\sqrt{1-y^2}$.

Notez que sans cette information, on aurait calculé $f(x)$ pour $x = -\sqrt{1-y^2}$, et on aurait trouvé $|y|$, donc y .

Une troisième explication est de noter que l'implication est en fait une équivalence car y est supposé positif.

Exercice 3 - Une valeur absolue.

Résoudre : $\left| \frac{x-4}{-x+1} \right| \geq 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Correction : Voir cours, un exercice très proche a été traité. Réponse finale : $\mathcal{S} = [-2, 2]$.

Exercice 4 - Un quotient complexe.

Pour un nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on note $q(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

- Supposons que $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $q(z)$ en fonction de θ , et en déduire que $q(z)$ est imaginaire pur.
- Réciproquement, soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $q(z) = ia$, avec $a \in \mathbb{R}$. Exprimer z en fonction de a , et calculer $|z|$.
- Résumer les deux questions précédentes par une courte équivalence de votre choix.

Correction :

- (2pts) On a, par exemple avec la technique de l'angle moitié :

$$q(z) = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2})}{-2i\sin(\frac{\theta}{2})} = i \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

Cela prouve que $q(\theta)$ est imaginaire pur.

D'autres techniques fonctionnaient, par exemple la technique du conjugué, ou montrer que : $\overline{q(z)} = -q(z)$.

- (2pts) On a :

$$q(z) = ia \iff \frac{1+z}{1-z} = ia \iff 1+z = ia(1-z) \iff z(1+ia) = ia-1 \iff z = \frac{ia-1}{1+ia}$$

On a alors :

$$|q(z)| = \frac{|ia-1|}{|1+ia|} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1.$$

3. (1pt) Notons que $|z| = 1$ si et seulement si on peut écrire $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. On a donc prouvé :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : |z| = 1 \iff q(z) \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 5 - Une équation complexe.

Résoudre l'équation $z^2 = 1 - i$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$,

1. En donnant les éventuelles solutions sous forme algébrique.
2. En donnant les éventuelles solutions sous forme exponentielle.
3. En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$.

Correction :

Voir cours

Exercice 6 - Une formule du cours.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^n k$, et démontrer votre résultat par récurrence.

Correction :

Voir cours

Exercice 7 - Un triangle.

Soient les points A d'affixe $z_A = 1 + \sqrt{2}i$ et B d'affixe $z_B = 2\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2}i$. Déterminer l'affixe z_C du point C tel que le triangle ABC soit isocèle direct en A , avec $\widehat{BAC} = 45^\circ$. On pourra s'intéresser au quotient $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$.

Correction :

Le quotient $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ comporte des informations géométriques lorsque l'on calcule son module et son argument :

$$\left| \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \right| = \frac{AB}{AC} = 1 \quad \text{car le triangle est isocèle}$$

et

$$\arg(z_A - z_B, z_A - z_C) = (\vec{CA}, \vec{BA}) = (\vec{AC}, \vec{AB}) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{dessin}$$

Ainsi, on peut écrire ce quotient sous forme exponentielle :

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

On déduit z_C après calculs.