DST 2

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Ce sujet comporte 3 pages et 4 exercices indépendants.

Exercice 1 - Linéariser pour s'échauffer. Linéariser $x \mapsto \cos^4 x$. En déterminer une primitive.

Exercice 2 - Calculs de sommes (4 questions indépendantes).

1. (Somme d'entiers).

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler les valeurs de $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

b. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

c. Soit $k \in \mathbb{N}$, développer $(k+1)^5 - k^5$.

d. En sommant le résultat obtenu à la question précédente, déterminer $\sum_{k=1}^{n} k^4$.

2. (Somme de sinusoïdes). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx).$$

a. Montrer que

$$\forall x \in]0, 2\pi[, \quad S_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Dire également ce que vaut $S_n(0)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $S_n(x) = 0$. Question bonus, dure : Combien y a-t-il de solutions dans $]0, 2\pi[$?

3. On veut étudier pour $n \in \mathbb{N}^*$ la suite définie par $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

a. Déterminer s_2 et s_3.

b. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 3$, on a $\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{k(k-1)(k-2)}$.

c. Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\forall k \geqslant 3, \quad \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{a}{k-2} + \frac{b}{k-1} + \frac{c}{k}.$$

d. Démontrer que $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n-1)}$.

e. En déduire une majoration de la suite s_n par une constante indépendante de n, puis que la suite converge.

4. Sommes en vrac (questions indépendantes)

a. Déterminer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

b. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$. Effectuer le changement d'indice $j = 2n+1-k$ dans S_n.

En déduire que $2S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$, puis la valeur de S_n.

Exercice 3 - Complexes et géométrie (3 questions indépendantes).

1. Soient q le quotient, défini pour $z \in \mathbb{C}$ et $z \neq 1-5i$, par $q(z) = \frac{z+3+i}{z-1+5i}$. Pour chacune des conditions suivantes trouver l'ensemble des points d'affixe z vérifiant la condition :

a. Le nombre $q(z)$ vérifie $|q(z)| = 1$.

b. Le nombre $q(z)$ est réel.

c. Le nombre $q(z)$ est imaginaire pur.

2. Soit z et z' deux complexes non nuls, dont on note $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\theta' \in [0, 2\pi[$ les arguments.

a. Montrer que $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = |z||z'|\cos(\theta - \theta')$.

b. Montrer que

$$|z+z'| = |z-z'| \iff \theta' \equiv \theta + \frac{\pi}{2} \quad [\pi].$$

Comment traduire géométriquement ce critère ?

3. a. Soit ABC un triangle quelconque. On note G le centre de gravité de ce triangle, c'est le point qui vérifie

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

On note a, b et c les affixes des points A, B et C, ainsi que z l'affixe de G.
Exprimer z en fonction de a, b et c.

b. On rappelle qu'un triangle équilatéral MNP est dit *direct* lorsque les trois points "tournent" dans le sens direct, c'est-à-dire quand

$$(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}) = (\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi].$$

Montrer qu'un triangle MNP est équilatéral direct si et seulement si $\frac{m-n}{p-n} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, où on a noté m, n et p les affixes de M, N et P.

c. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Mettre $-j^2$ sous forme exponentielle, puis montrer qu'un triangle MNP est équilatéral direct si et seulement si $m + nj + pj^2 = 0$.

d. Soit $R = (-2, \sqrt{3})$ et $S = (4, 1)$. Montrer qu'il existe un unique point M, que l'on déterminera, tel que RSM est équilatéral direct.

e. (Bonus, dur). Partant d'un triangle ABC direct (mais pas nécessairement équilatéral), on construit trois triangles équilatéraux ABC', BCA', ACB', chacun ayant pour base les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$, et "extérieurs" au triangle ABC. On note M, N et P les trois centres de gravité de ces trois triangles, ainsi que m, n et p leurs affixes respectives.
Montrer que les triangles ABC et MNP ont le même centre de gravité (on pourra raisonner dans le trangle ABM pour exprimer m en fonction de a et b, faire de même pour n et p, puis former $a+b+c-(m+n+p)$).

f. (Bonus, très dur). Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Exercice 4 - Complexes et équations (4 questions indépendantes).

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^4 + (i+3)z^2 + 2 - 2i = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^6|z| = 1.$$

3. a. Mettre sous forme exponentielle $u = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = u$.

4. (Racines 4-ième, mais sous forme algébrique !)

a. Calculer les racines carrées de $4(7-24i)$.

b. En déduire les racines quatrième de $4(7-24i)$