ex

I) 1) Sol de l'equation homogène : $y_H : x \mapsto \lambda e^{4x}, \lambda \in \mathbb{R}$

2) Sol part :

Cherchons une sol part sous la forme $y_P : x \mapsto (ax^2 + bx)e^{4x}$

y_P sol $\Leftrightarrow (2ax+b)e^{4x} + \cancel{4(ax^2+bx)e^{4x}} - \cancel{4(ax^2+bx)e^{4x}} = (2x-4)e^{4x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$

(identification)

$y_P : x \mapsto (x^2 - 4x)e^{4x}$.

3) Sol part :

Cherchons - - - $y_P : x \mapsto a\cos(3x) + b\sin(3x)$

y_P sol $\Leftrightarrow -3a\sin(3x) + 3b\cos(3x) - 4a\cos(3x) - 4b\sin(3x) = 100\cos(3x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 4b = 0 \\ -4a + 3b = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -16 \\ b = 12 \end{cases}$

(identification)

$y_P : x \mapsto -16\cos(3x) + 12\sin(3x)$

4) Sol generale :

$y : x \mapsto (x^2 - 4x + \lambda)e^{4x} - 16\cos(3x) + 12\sin(3x), \lambda \in \mathbb{R}$

5) Pb de Cauchy :

$y(0) = 8 \Leftrightarrow \lambda - 16 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 24$

$y : x \mapsto (x^2 - 4x + 24)e^{4x} - 16\cos(3x) + 12\sin(3x)$

II) 6) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-2)^2 + 20 = x^2 - 4x + 4 + 20 = x^2 - 4x + 24$

D'où

$$g : x \mapsto (x-2)^2 e^{4x} + 20 e^{4x}$$

7) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (x-2)^2 e^{4x} \geq 0 \quad$ et $\quad 20e^{4x} \geq 20$

Donc, $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \ g(x) \geq 20$

De plus, $\quad g(x) = 20 \iff ((x-2)^2 = 0 \text{ et } e^{4x} = 1)$

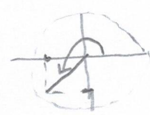
$\iff (x = 2 \text{ et } x = 0)$ impossible

Donc,

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ g(x) > 20$

8) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = 20\,(\cos(3x) \times (-0,8) - \sin(3x) \times (-0,6))$

soit $\varphi \in [0, 2\pi[\ / \ \begin{cases} \cos\varphi = -0,8 \\ \sin\varphi = -0,6. \end{cases}$



Alors

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = 20\cos(3x - \varphi)$

Notons que $\varphi \in \left]\pi ; \frac{3\pi}{2}\right[$

et que : $\quad -\frac{\sqrt{3}}{2} < -0,8 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\quad \varphi \in \left]\pi + \frac{\pi}{6} ; \pi + \frac{\pi}{4}\right[$

9) $\forall x \in \mathbb{R}_+,$

$(f+g)(x) = 20\cos(3x-\varphi) + f(x) > 20\cos(3x-\varphi) + 20 = 20\,\underbrace{(1 + \cos(3x-\varphi)}_{\geq 0}$

Or, $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \ 1 + \cos(3x - \varphi) \geq 0$

Donc

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (f+g)(x) > 0$

CA

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) • $\forall x \in [1,2]$, $x \geq 1 > 0$ et $\ln(x) \geq \ln(1) = 0$

Donc

$\forall x \in [1,2]$, $x \ln^n(x) \geq 0$

Par croissance de l'intégrale, $\underline{I_n \geq 0}$. ((I_n) minorée par 0)

• $I_{n+1} - I_n = \int_1^2 x \ln^{n+1}(x)\,dx - \int_1^2 x \ln^n(x)\,dx = \int_1^2 x \ln^n(x) \times (\ln(x) - 1)\,dx$

Or,

$\forall x \in [1,2]$, $\begin{cases} x \geq 0 \\ \ln(x) \geq 0 \\ \ln(x) - 1 \leq 0 \quad (\text{car } \ln(x) \leq \ln(e) = 1) \end{cases}$

D'où

$\forall x \in [1,2]$, $x \ln^n(x)(\ln(x) - 1) \leq 0$

par croissance de l'intégrale,

$I_{n+1} - I_n \leq 0 \iff \underline{I_{n+1} \leq I_n}$

D'où, (I_n) décroissante

2) (I_n) décroissante et minorée

D'où, d'après Théo $\underline{\text{Limite Monotone}}$ (TLM)

(I_n) cv vers ℓ $(\ell \geq 0)$

3) Soient $v : x \mapsto \ln^{n+1}(x)$; $u : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$, $(u,v) \in \mathcal{E}^1([1,2], \mathbb{R})$

$v' : x \mapsto (n+1)\frac{1}{x}\ln^n(x)$; $u' : x \mapsto x$

Par I.P.P

$I_{n+1} = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln^{n+1}(x)\right]_1^2 - \frac{n+1}{2}\int_1^2 \underbrace{x^2 \frac{1}{x}}_{x} \ln^n(x)\,dx$

$\underline{I_{n+1} = 2\ln^{n+1}(2) - \frac{n+1}{2} I_n}$

4) On sait que (I_n) cv vers ℓ $(\ell \geq 0)$

Raisonnons par l'absurde et supposons $\ell > 0$

Alors,

$\lim_{+\infty} \frac{n+1}{2} I_n = +\infty$

D'où $\lim I_{n+1} = -\infty$ (absurde)

Donc, $\underline{\ell = 0}$

ex

A) 1) $z = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{e^{i7\pi/6}}{e^{i3\pi/4}} = e^{i\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{12}}$

2) $z = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{-2+2i} \times \frac{-2-2i}{-2-2i} = \frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + i(2\sqrt{6} + 2\sqrt{2})}{8} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B) 4) $\forall z \in \mathbb{C},\ (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = z^5 + \cancel{z^4} + \cancel{z^3} + \cancel{z^2} + \cancel{z} - \cancel{z^4} - \cancel{z^3} - \cancel{z^2} - \cancel{z} - 1$
$= z^5 - 1$

5). Soit $z \in \mathbb{C}$

$\left(z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1\right)\left(z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1\right) = z^4 + \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z^3} + z^2 + \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}z^3} +$

$\cancel{\frac{1-5}{4}z^2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + \cancel{z^2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1$

$= z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$

D'où, d'après Q1

$\forall z \in \mathbb{C},\ z^5 - 1 = (z-1)\left(z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1\right)\left(z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1\right)$

6) a) $z = e^{2i\pi/5}$

Donc, $z^5 - 1 = e^{i2\pi} - 1 = 1 - 1 = 0$

Un produit est nul ssi un facteur est nul

Or $z - 1 = e^{i2\pi/5} - 1 \neq 0$

D'où $\left(z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1\right)\left(z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1\right) = 0$

b) Si $z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$, alors $\mathrm{Im}\left(z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1 = 0\right) = 0$

Or $\mathrm{Im}\left(z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1\right) = \mathrm{Im}\left(\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\frac{2\pi}{5}\right) + 1\right)$

$= 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \underbrace{2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}_{>0}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}_{>0} + \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}_{>0}\right) > 0$

Donc $z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$

c) D'après Q6b, $\mathrm{Re}\left(z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} z + 1\right) = 0$

En suivant la même démarche qu'en Q6b

$$\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) \underline{- \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \underline{1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}_{>0}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1-\sqrt{5}}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

7) $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+3}{4} \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+3}{8} \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

(car $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$) $\qquad$ ($(\sqrt{5}+1)^2 = 5 + 1 + 2\sqrt{5} = 6 + 2\sqrt{5}$)

C) 8) $S = \left\{ e^{i\frac{\pi}{8}}, -e^{i\frac{\pi}{8}} \right\}$

9) $e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $(a+ib)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \sqrt{2}/2 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = \sqrt{2}/2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ 2b^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ 2ab = \sqrt{2}/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } b = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \text{ou} \\ a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } b = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

10) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, d'où $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$