DST 1

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Une équation différentielle.

On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' + 3y = 6x^2 - 2e^{-3x},$$

où l'inconnue est une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée.

2. Déterminer une solution particulière, notée y_{p_1}, de l'équation : $y' + 3y = 6x^2$.

3. Déterminer une solution particulière, notée y_{p_2}, de l'équation : $y' + 3y = -2e^{-3x}$.

4. Démontrer que $y_{p_1} + y_{p_2}$ est solution de l'équation différentielle initiale (E).

5. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

6. Déterminer les solutions de (E) telles que $y(0) = 3$.

Correction :

1. L'équation homogène associée est :

$$y' + 3y = 0.$$

Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-3x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. On cherche y_{p_1} sous la forme : $y_{p_1}(x) = Ax^2 + Bx + C$, avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ à trouver. On a alors

$$y'_{p_1}(x) + 3y_{p_1}(x) = 2Ax + B + 3(Ax^2 + Bx + C) = 3Ax^2 + (2A + 3B)x + B + 3C.$$

Ainsi, y_{p_1} est solution particulières si et seulement si, par identification :

$$\begin{cases} 3A = 6 \\ 2A + 3B = 0 \\ B + 3C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ B = -\frac{4}{3} \\ C = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Finalement :

$$y_{p_1} : x \mapsto 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}.$$

3. Attention, $x \mapsto e^{-3x}$ est solution de l'équation homogène ! ! On doit monter le degré et chercher y_{p_2} sous la forme $y_{p_2}(x) = Cxe^{3x}$. On a alors après calculs :

$$y'_{p_1}(x) + 3y_{p_1}(x) = Ce^{-3x},$$

et donc y_{p_2} est soution si et seulement si $C = -2$. Finalement,

$$y_{p_2} : x \mapsto -2xe^{4x}.$$

4. Posons $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, on a

$$y_p' + 3y_p = y_{p_1}' + y_{p_2}' + 3y_{p_1} + 3y_{p_2} = (y_{p_1}' + 3y_{p_1}) + (y_{p_2}' + 3y_{p_2}) = x^2 - 2e^{-3x},$$

ce qui prouve que y_p est solution de (E).

5. Par superposition, l'ensemble des solutions de (E) est

$$x \mapsto y_0(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = \lambda e^{-3x} + 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - 2xe^{4x}.$$

6. Après calculs, on trouve $\lambda + \frac{4}{9} = 3$ et donc $\lambda = \frac{23}{9}$. On a donc une unique solution : la fonction

$$x \mapsto (\frac{23}{9} - 2x)e^{-3x} + 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}.$$

Exercice 2 - Une somme de sinusoïdes.

1. Trouver $r > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) - \sin(2x) = r\cos(2x - \varphi).$$

2. Résoudre l'équation : $\cos(2x) - \sin(2x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3. Donner les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Correction :

1. Le cours fournit :

$$\cos(2x) - \sin(2x) = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}),$$

donc $r = \sqrt{2}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

2. On a grâce à la question précédente :

$$\cos(2x) - \sin(2x) = \frac{\sqrt{6}}{2} \iff \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\text{ ou }\; 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, après avoir résolu ces équations :

$$\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

3. On trouve 4 valeurs : $\mathcal{S} \cap [0, 2\pi] = \{\frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\}$

Exercice 3 - La preuve pour la formule des solutions homogènes. Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, on étudie l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + ay(t) = 0.$$

Le but est de démontrer la formule connue pour l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

1. On a par dérivation d'un produit, et en utilisant léquation différentielle :

$$z'(t) = ae^{at}y(t) + e^{at}y'(t) = ae^{at}y(t) + e^{at} \times (-ay(t)) = 0$$

.

2. Puisque $z' = 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction z est constante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R} : \; z(t) = \lambda \iff e^{at}y(t) = \lambda \iff y(t) = \lambda e^{-at}.$$

Exercice 4 - Une ipp. A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction : Voir TD. Après calcul :

$$I = \frac{1}{5}(1 + 2e^{\pi})$$

Exercice 5 - Autour de la fonction tangente. On souhaite donner quelques propriétés de la fonction tan : $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Justifier que tan est bien définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. Calculer la dérivée de la fonction tan.
3. Donner l'équation de la droite tangente à la courbe de tan en $x = 0$.
4. On introduit la fonction $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, définie par $g : x \mapsto \tan(x) - x$. Etablir le tableau de variation de la fonction g.
5. En déduire :
$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan(x) \geqslant x.$$

Correction :

1. Puisque :
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \cos(x) \neq 0,$$
la fonction tan est bien définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.
2. Voir cours, on peut trouver : $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
3. En utilisant le calcul de dérivée, on trouve : $y = x$.
4. On trouve : $g' : x \mapsto \tan^2(x) \geqslant 0$, donc g est croissant. On trouve facilement les limites et le tableau de variations.
5. Par lecture du tableau :
$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad g(x) \geqslant 0 \iff \tan(x) \geqslant x.$$