DST 1

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Une équation différentielle.

On se propose de résoudre le problème suivant :

$$(E) \qquad y' - 4y = 100\cos(3x) - 4e^{4x}.$$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière, notée y_{p_1}, de l'équation : $y' - 4y = 100\cos(3x)$.
3. Déterminer une solution particulière, notée y_{p_2}, de l'équation : $y' - 4y = -4e^{4x}$.
4. Démontrer que $y_{p_1} + y_{p_2}$ est solution de l'équation différentielle initiale (E).
5. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
6. Déterminer les solutions de (E) telles que $y(0) = 8$.

Correction :

1. L'équation homogène associée est :
$$y' - 4y = 0.$$
Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{4x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. On cherche y_{p_1} sous la forme : $y_{p_1}(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ à trouver. On a alors
$$y'_{p_1}(x) - 4y_{p_1}(x) = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x) - 4A\cos(3x) - 4B\sin(3x) = (-4A+3B)\cos(3x) + (-3A-4B)\sin(3x).$$
Ainsi, y_{p_1} est solution particulières si et seulement si :
$$(-4A + 3B)\cos(3x) + (-3A - 4B)\sin(3x) = 100\cos(3x).$$
Par identification, on résout donc le système :
$$\begin{cases} -4A + 3B = 100 \\ -3A - 4B = 0 \end{cases}$$
Une résolution standard conduit à $A = -16$ et $B = 12$. Finalement :
$$y_{p_1} : x \mapsto -16\cos(3x) + 12\sin(3x).$$
3. Attention, $x \mapsto e^{4x}$ est solution de l'équation homogène ! ! On doit monter le degré et chercher y_{p_2} sous la forme $y_{p_2}(x) = Cxe^{4x}$. On a alors après calculs :
$$y'_{p_1}(x) - 4y_{p_1}(x) = Ce^{4x},$$
et donc y_{p_2} est soution si et seulement si $C = -4$. Finalement,
$$y_{p_2} : x \mapsto -4xe^{4x}.$$

4. Posons $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, on a

$$y_p' - 4y_p = y_{p_1}' + y_{p_2}' - 4y_{p_1} - 4y_{p_2} = (y_{p_1}' - 4y_{p_1}) + (y_{p_2}' - 4y_{p_2}) = 100\cos(3x) - 4e^{4x},$$

ce qui prouve que y_p est solution de (E).

5. Par superposition, l'ensemble des solutions de (E) est

$$x \mapsto y_0(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = \lambda e^{4x} - 16\cos(3x) + 12\sin(3x) - 4xe^{4x}.$$

6. Après calculs, on trouve $\lambda - 16 = 8$ et donc $\lambda = 24$. On a donc une unique solution : la fonction

$$x \mapsto (24 - 4x)e^{4x} - 16\cos(3x) + 12\sin(3x).$$

Exercice 2 - Minorer une fonction à la main. On considère les fonctions suivantes, définies sur $[0, +\infty[$:

$$f : x \mapsto -16\cos(3x) + 12\sin(3x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto (x^2 - 4x + 24)e^{4x}.$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g(x) = ((x-2)^2 + 20)e^{4x}.$$

2. En déduire :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g(x) > 20.$$

3. Montrer que la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = A\cos(3x - \varphi),$$

où A sera déterminé explicitement, tandis qu'on donnera des équations vérifiées par φ, ainsi qu'un encadrement aussi précis que possible de φ.

4. Démontrer que $f + g$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

Correction :

1. Evident en développant.

2. On a déjà :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \quad (x-2)^2 + 20 \geqslant 20,$$

donc comme $e^{4x} > 0$, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \quad ((x-2)^2 + 20)e^{4x} \geqslant 20e^{4x},$$

Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{4x} \geqslant 1$, et donc en résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : ((x-2)^2 + 20)e^{4x} \geqslant 20e^{4x} \geqslant 20.$$

Pour montrer qu'on a une inégalité stricte, on procède par l'absurde et on suppose qu'on a une égalité :

$$((x-2)^2 + 20)e^{4x} = 20e^{4x} = 20,$$

et en particulier, on a $(x-2)^2 = 0$ et $e^{4x} = 1$, ce qui amène à $x = 2$ et $x = 0$, absurde.
Notez qu'une étude de fonction avec le signe de g' était aussi possible.

3. Le cours fournit :

$$A = \sqrt{(-16)^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20,$$

tandis que φ vérifie :

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{16}{20} = -\frac{4}{5} \\ \sin\varphi = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

A ce stade, on ne peut pas calculer φ explicitement, mais on observe avec les signes des sinus et cosinus que (faire un cercle), à 2π près : $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. On peut être plus précis : on a

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{4}{5} < -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

et donc, avec un cercle trigo :

$$\varphi \in]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}[.$$

4. On a grâce à la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 20\cos(3x - \varphi) \geqslant -20,$$

et ainsi, avec la question **Q2** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + g(x) > -20 + 20 = 0.$$

Exercice 3 - Une suite d'intégrales. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ I_n = \int_1^2 x(\ln(x))^n \, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0.

2. Qu'en déduire ?

3. A l'aide d'une intégration par partie, monter que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : I_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - \frac{n+1}{2} I_n.$$

4. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Correction : Voir corrigé de M. Scotto.

Exercice 4 - Un étrange quotient. On introduit le quotient

$$q(\theta) = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}.$$

1. **a.** Pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ le quotient $q(\theta)$ est-il bien défini ?

b. Pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ a-t-on $q(\theta) = 0$?

2. **a.** Simplifier $q(\theta)$ en utilisant l'angle moitié

b. En déduire $|q(\theta)|$. Etudier la parité de $\theta \mapsto |q(\theta)|$.

c. Démontrer que $\theta \mapsto |q(\theta)|$ est croissante sur $]0, \pi[$.

3. **a.** Montrer que $q(\theta)$ est imaginaire pur.

b. Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, donner un argument de $q(\theta)$.

c. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, montrer que $\frac{1-z}{1+z}$ est imaginaire pur.

d. On se propose de retrouver la question précédente géométriquement. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, notons M le point d'affixe z. Comment construire le point N d'affixe $-z$? Comment interpréter le nombre $\arg(\frac{1-z}{1+z})$? Illustrer, et retrouver le résultat précédent.

4. (Question indépendante)

a. Etudions la réciproque : soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathrm{Re}(\frac{1-z}{1+z})$ en fonction de a et b.

b. En déduire que si $\frac{1-z}{1+z}$ est imaginaire pur, alors $|z| = 1$.

Correction :

1. **a.** On cherche quand le dénominateur s'annule :

$$1 + e^{i\theta} = 0 \iff e^{i\theta} = -1 \iff \theta \equiv \pi \quad [2\pi],$$

Ainsi, q est bien définie sur $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \not\equiv \pi \quad [2\pi]\} = \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

b. On raisonne de même :

$$q(\theta) = 0 \iff e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0 \ [2\pi].$$

2. **a.** La technique de l'angle moitié donne :

$$q(\theta) = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})} = \frac{-2i\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta}{2})} = -i\tan(\frac{\theta}{2}).$$

b. On déduit :

$$|q(\theta)| = |\tan(\frac{\theta}{2})|.$$

En particulier, on a

$$|q(-\theta)| = |\tan(\frac{-\theta}{2}) = |-\tan(\frac{\theta}{2})| = |\tan(\frac{\theta}{2})| = |q(\theta)|,$$

et la fonction $\theta \mapsto |q(\theta)|$ est paire. Les plus rigoureux auront précisé que son ensemble de définition, vu à la question 1), est symétrique par rapport à l'origine.

c. Sur $]0,\pi[$, on a $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, et on a alors $\sin(\frac{\theta}{2}) > 0$ et $\cos(\frac{\theta}{2}) > 0$, donc on a :

$$\forall\theta \in]0,\pi[, \quad |q(\theta)| = \tan(\frac{\theta}{2}).$$

Posons $g(\theta) = \tan(\frac{\theta}{2})$. On peut montrer que g est croissante sur $]0,\pi[$ par composée, mais un lycéen fera un calcul de dérivée : après calculs on a

$$\forall\theta \in]0,\pi[, \quad g'(\theta) = \frac{1}{2\cos(\frac{\theta}{2})^2} > 0,$$

ce qui prouve que la fonction est croissante sur $]0,\pi[$.

3. **a.** On utilise le résultat trouvé en 2a) : $q(\theta) = -i\tan(\frac{\theta}{2})$. Il est direct que $q(\theta)$ est imaginaire pur.

b. Déjà, un argument de $q(\theta)$ est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, puisque $q(\theta)$ est imaginaire pur. Ensuite, on raisonne selon le signe de $\tan(\frac{\theta}{2})$: si $\theta \in]0,\pi[$, comme on l'a vu ci-dessus, on a $\tan(\frac{\theta}{2}) > 0$, et un argument de $q(\theta)$ est $-\frac{\pi}{2}$. Dans le cas $\theta \in]-\pi, 0[$, on a $\tan(\frac{\theta}{2}) < 0$ par imparité, et donc un argument de $q(\theta)$ est $\frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, si $\theta = 0$, on a $q(0) = 0$, et on n'a pas d'argument.

c. Puisque $|z| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$, et on a alors

$$\frac{1-z}{1+z} = q(\theta).$$

On déduit le résultat de la question 3a).

d. Notons N le point d'affixe $-z$, on le déduit de M par la symétrie de centre O, l'origine.
Par ailleurs, on introduit $A = (1,0)$, le point d'affixe 1. Alors on

$$\arg(\frac{1-z}{1+z}) \equiv (\vec{AM}, \vec{AN}) \quad [2\pi].$$

Mais $[MN]$ est un diamètre du cercle unité $\mathbb{U}$, et $A \in \mathbb{U}$, donc le triangle AMN est rectangle en A (dessin obligatoire). Donc

$$\arg(\frac{1-z}{1+z}) = \pm\frac{\pi}{2},$$

et donc $\frac{1-z}{1+z}$ est imaginaire pur.

4. **a.** On a :

$$\frac{1-z}{1+z} = \frac{1-a-ib}{1+a+ib} = \frac{(1-a-ib)(1+a-ib)}{|1+a+ib|^2} = \frac{(1-ib)^2-a^2}{|1+a+ib|^2} = \frac{1-b^2-a^2-2ib}{(1+a)^2+b^2}.$$

On déduit :

$$\mathrm{Re}(\frac{1-z}{1+z}) = \frac{1-a^2-b^2}{(1+a)^2+b^2}.$$

b. On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1-z}{1+z} \text{ imaginaire pur} &\iff \mathrm{Re}(\frac{1-z}{1+z}) = 0 \\
&\iff 1-a^2-b^2 = 0 \\
&\iff a^2+b^2 = 1 \\
&\iff |z| = 1
\end{aligned}$$

Notons qu'on montre en fait l'équivalence, on retrouve bien le sens déjà montré.

Exercice 5 - Exercices en vrac.

1. Soit $z = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{-2+2i}$.

a. Mettre z sous forme algébrique.

b. Mettre z sous forme trigonométrique.

c. En déduire $\cos(\frac{5\pi}{12})$.

2. Rappeler la définition du nombre dérivée. Soit f et g dérivables sur $\mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer :

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

3. Résoudre $\sin(2x) \geqslant \sin(x)$, d'inconnue $x \in [0, 2\pi[$.

4. Calculer une primitive de $x \mapsto e^{2x}\sin(2x)$.

5. Montrer :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} \leqslant e^x.$$

Correction :

1. Voir Corrigé de M. Scotto.

2. Voir cours.

3. on rappelle que $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ (si on n'utilise pas la formule, l'exo est dur). On a alors

$$\sin(2x) \geqslant \sin(x) \iff 2\sin x \cos x \geqslant \sin(x)$$

Attention à ne pas simplifier trop vite, car on doit pour cela raisonner sur le signe de $\sin x$!

- Si $x \in]0, \pi[$, on a $\sin x > 0$, et on a alors

$$2\sin x \cos x \geqslant \sin(x) \iff 2\cos x \geqslant 1 \iff \cos x \geqslant \frac{1}{2} \iff x \in]0, \frac{\pi}{3}].$$

- Si $x \in]\pi, 2\pi[$, on a $\sin x < 0$, et on a alors

$$2\sin x \cos x \geqslant \sin(x) \iff 2\cos x \leqslant 1 \iff \cos x \leqslant \frac{1}{2} \iff x \in]\pi, \frac{5\pi}{3}].$$

- Si $x = 0$ ou $x = \pi$, l'inégalité est vérifiée, puisque les deux membres valent 0.

En conclusion, l'ensemble des solutions est $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\pi, \frac{5\pi}{3}]$.

4. Voir cours. On peut passer par les complexes (recommandé), ou faire une double ipp. On trouve comme primitive : $x \mapsto \frac{1}{4}e^{2x}(-\cos(2x) + \sin(2x))$.

5. On forme et on étudie la différence. On introduit la fonction $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$D : x \mapsto e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2}) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

Afin d'avoir les variations de D, on calcule :

$$D'(x) = e^x - 1 - x.$$

Le signe de cette fonction n'est pas clair, donc on redérive :

$$D''(x) = e^x - 1,$$

et on constate que

$$\forall x \geqslant 0, \quad 1 \leqslant e^x \iff 0 \leqslant D''(x).$$

Ainsi la fonction D' est croissante. Or $D'(0) = 0$, d'où

$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant D'(x).$$

Donc, D est croissante, et on itère le raisonnement : on a $D(0) = 0$ et donc

$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant D(x) \iff 1 + x + \frac{x^2}{2} \leqslant D(x).$$