Concours blanc algèbre

Corrigé

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats.

Exercice 1 - Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f : (x, y, z) \mapsto (-x + 6y - z; -x + 3y; x + 3y - 2z).$$

On sait que ce type de fonction est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. On a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. On détermine $\ker f$:

$$(x, y, z) \in \ker(f) \iff f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} -x + 6y - z = 0 \\ -x + 3y = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} -x + 6y - z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 9y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y \\ z = 3y \end{cases}$$

Ainsi,

$$\ker(f) = \{(3y, y, 3y), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((3, 1, 3)).$$

Le vecteur non nul $(3, 1, 3)$ formant une famille libre, c'est une base de $\ker(f)$, et $\dim(\ker(f)) = 1$.

D'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$

On calcule $\text{Im}(f)$ par transfert de la base canonique :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \text{Vect}((-1, -1, 1), (6, 3, 3), (-1, 0, -2)).$$

Comme on sait déjà que $\dim \text{Im}(f) = 2$, deux vecteurs libres de $\text{Im}(f)$ formeront une base. Les deux premiers étant clairement non colinéaires, ils forment une base de $\text{Im}(f)$. Ainsi, une base de $\text{Im}(f)$ est $((-1, -1, 1), (6, 3, 3))$.

Remarque : on pouvait aussi commencer par trouver $\text{Im}(f)$, le choix de M. Scotto, et $\ker(f)$ se déduit rapidement. Les deux méthodes se valent.

3. Puisque $\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = 2 < 3$, la matrice n'est pas inversible.

4. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Après une résolution rapide de système, on trouve $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille est libre. (On pouvait aussi calculer le déterminant de la matrice associée). Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, elle est aussi génératrice, et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

On calcule les images de ces vecteurs :

$$\begin{cases} f(u) = 0 \\ f(v) = (3, 1, 3) = u \\ f(w) = (2, 1, 1) = v \end{cases} .$$

Notez au passage qu'on a $u \in \ker(f)$, et qu'à ce stade on peut vérifier ce qui a été trouvé ci-dessus.

Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. La matrice P est obtenue en rangeant (u, v, w) en colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule P^{-1} après un pivot. Après calculs, on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Voir cours

7. On calcule $N^3 = 0$ puis

$$\forall k \geq 3 : N^k = 0,$$

et donc en utilisant **Q7** :

$$\forall k \geq 3 : A^k = 0.$$

8. a. On calcule $f(g(a))$:

$$\begin{aligned} f(g(a)) &= g(f(a)) \quad \text{car } g \circ f = f \circ g \\ &= g(0) \quad \text{car } a \in \ker(f) \\ &= 0 \quad \text{car } g \text{ linéaire} \end{aligned}$$

Cela prouve que $g(a) \in \ker(f)$.

b. D'après **Q2**, le sous-espace vectoriel $\ker(f)$ est de dimension 1. Ainsi, comme $a \in \ker(f)$ est non nulle, on a $\ker(f) = \text{Vect}(a)$. Donc $g(a)$ et a sont colinéaires, ce qui répond à la question.

9. On cherche $M \in E_N$ sous la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a après calculs :

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad NM = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$M \in E_N \iff \begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e \\ b = f \\ d = h \\ e = i \end{cases} \iff \begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{cases}$$

Finalement,

$$E_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(I_3, N, N^2)$$

Cela prouve que E_N est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$, et la famille ci-dessus étant clairement libre, c'est une base de E_N . En particulier, $\dim(E_N) = 3$.

10. On a :

$$\begin{aligned} M \in E_N &\iff MN = NM \iff MP^{-1}AP = P^{-1}APM \\ &\iff PMP^{-1}A = APMP^{-1}, \text{ en multipliant à gauche par } P \text{ et à droite par } P^{-1} \\ &\iff PMP^{-1} \in E_A. \end{aligned}$$

11. Il est direct que Φ est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$. Trouvons son noyau :

$$M \in \ker(\Phi) \iff PMP^{-1} = 0 \iff M = 0 \text{ en multipliant à droite par } P \text{ et à gauche par } P^{-1}.$$

Ainsi, $\ker(\Phi) = \{0\}$, et Φ est injective. Comme c'est un endomorphisme, elle est aussi bijective.

12. Question intuitive mais dure à rédiger avec précision. Notons que, d'après **Q11**, on a $E_A = \Phi(E_N)$. On sait $\Phi|_{E_N}$ est encore une bijection, de E_N sur $\Phi(E_N) = E_A$. Donc $\dim(E_A) = \dim(E_N) = 3$, d'après **Q10**.

Exercice 2 - Endomorphisme chez les polynômes.

1. Soit u défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$u : P \mapsto 3P - XP' - P''.$$

a. Vérifions que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\deg(XP') = 1 + \deg(P') = \deg(P) \leq 3,$$

puis par somme $\deg(u(P)) \leq 3$.

Vérifions que u est linéaire : soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ et $(\lambda, \mu)^2$, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= 3(\lambda P + \mu Q) - X(\lambda P + \mu Q)' - (\lambda P + \mu Q)'' \\ &= 3\lambda P + 3\mu Q - X\lambda P' - \mu Q' - \lambda P'' - \mu Q'' \\ &= \lambda(3P - XP' - P'') + \mu(3Q - XQ' - Q'') \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

Donc u est linéaire, et c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. On détermine $\text{Im}(u)$ par transfert de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. On a

$$\begin{cases} u(1) = 3 \\ u(X) = 2X \\ u(X^2) = X^2 - 2 \\ u(X^3) = -6X \end{cases} .$$

Ainsi,

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(3, 2X, X^2 - 2, -6X) = \text{Vect}(1, X, X^2 - 2) = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X].$$

En particulier, $\text{rg}(u) = 3$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(u)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \text{rg}(u) = 4 - 3 = 1$. Il suffit donc de trouver un élément non nul du $\ker$. On note que

$$u(X^3) = -6X = -3u(X),$$

et donc par linéarité $u(X^3 + 3X) = 0$, donc $X^3 + 3X \in \ker(u)$. D'après ce qui précède,

$$\ker(u) = \text{Vect}(X^3 + 3X).$$

c. On a déjà calculé les images de la base canonique, ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on cherche à savoir s'il existe $P \in \mathbb{R}_3[X]$ non nul tel que $u(P) = \lambda P$.

(i) Soit $a_n \neq 0$ le coefficient dominant de P , alors après calculs on a

$$u(P) = (3 - n)a_n X^n + R \text{ avec } \deg(R) < 3,$$

et donc le coefficient en X^n de $u(P)$ est $(3 - n)a_n$ (on peut le dire en disant que c'est visible). C'est le coefficient dominant de $u(P)$ si $n \neq 3$.

Ainsi, on a

$$u(P) = \lambda P \implies 3 - n = \lambda.$$

Comme $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, alors $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$, et on a $\lambda = 3 - n$.

- (ii) Pour $\lambda = 0$, on a $u(P) = 0$ si et seulement si $P \in \ker(u)$, qui a été trouvé ci-dessus.
 - (iii) Soit P tel $u(P) = 3P$, d'après ce qui précède, $\deg(P) = 3 - 3 = 0$, c'est-à-dire que P est nécessairement constant. Réciproquement, un polynôme constant vérifie bien $u(P) = 3P$.
- e. (i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a

$$u(P) = \lambda P \iff u(P) - \lambda P = 0 \iff (u - \lambda \text{Id})P = 0 \iff P \in \ker(u - \lambda \text{Id}).$$

Ainsi, il existe P non nul tel que $u(P) = \lambda P$ si et seulement si $\ker(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$, et donc si et seulement si la matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible.

- (ii) Formons la matrice $A - \lambda I_3$:

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, elle est donc inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, c'est-à-dire si et seulement $\lambda \notin \{0, 1, 2, 3\}$.

Ainsi, si $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$, la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, et d'après la question précédente, il existe P non nul tel que $u(P) = \lambda P$.

Exercice 3 - Géométrie et algèbre linéaire. Soit $\vec{n} = (2, -2, 1)$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$f : u \mapsto \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}.$$

1. Montrons que f est linéaire : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$, ainsi que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \frac{(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{n})\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} = \frac{(\lambda\vec{u} \cdot \vec{n} + \mu\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}).$$

De plus, comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. a. On a

$$\vec{u} \in \ker f \iff u \cdot \vec{n} = 0 \iff u \perp \vec{n}.$$

Ainsi, $\ker(f)$ est le plan perpendiculaire à $\vec{n}$. Il est de dimension 2.

- b. On a le vecteur normal de ce plan, et puisqu'il passe par l'origine, on déduit son équation cartésienne :

$$\ker(f) : 2x - 2y + z = 0.$$

3. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, alors $f(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{n}$. Ainsi, $\text{Im } f \subset \text{Vect}(\vec{n})$. Or $\dim(\vec{n}) = 1$, et $\text{rg}(f) = 1$ d'après la question précédente, on a donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(\vec{n})$ (c'est également très facile sans la question précédente).
4. Standard, on calcule les images des vecteurs de la base canonique. On trouve :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Le plus simple est le calcul matriciel. Après un calcul rapide, on a $A^2 = A$, ce qui prouve que $f \circ f = f$. On pouvait bien sûr calculer frontalement $f(f(\vec{u}))$ et retomber sur $f(\vec{u})$. Cela prouve que f est un projecteur, sur la droite $\text{Vect}(\vec{n})$, parallèlement au plan orthogonal à $\vec{n}$.
6. Comme f est un projecteur, on a $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$ (la preuve n'était pas attendue). Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs formant une base de $\ker(f)$, par exemple

$$\vec{v} = (1, 1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{w} = (0, 1, 2)$$

alors puisque $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$, la famille $(\vec{n}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $f(\vec{n}) = \vec{n}$, la matrice de f dans cette base est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. On utilise la forme canonique :

$$x^2 - 4x + y^2 - 12y + z^2 + 2z = 8 \iff (x-2)^2 - 4 + (y-6)^2 - 36 + (z+1)^2 - 1 = 8 \iff (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 49.$$

Ainsi $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $C = (2, 6, -1)$ et de rayon $\sqrt{49} = 7$.

8. L'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 6 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour déterminer $\mathcal{D} \cap \ker(f)$, on injecte ces équations dans l'équation de $\ker(f)$:

$$2x - 2y + z = 0 \iff 2(2 + 2t) - 2(6 - 2t) - 1 + t = 0 \iff t = 1.$$

Ainsi, $\mathcal{D} \cap \ker(f) = \{(4, 4, 0)\}$

9. On sait que $\ker(f) \cap \mathcal{S}$ est ou bien un cercle, ou bien un point, ou bien est vide, selon la distance du centre C au plan $\ker(f)$.

Comme la droite $\text{Vect}(\vec{n})$ est orthogonale au plan $\ker(f)$, alors $\mathcal{D} \cap \ker(f)$ est le projeté orthogonal de C sur $\ker(f)$: c'est le point $H(4, 4, 0)$ calculé ci-dessus. Il est alors direct que la distance de C au plan $\ker(f)$ est $HC = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$. Comme $HC < 7$, $\ker(f) \cap \mathcal{S}$ est un cercle, contenu dans le plan $\mathcal{P}$, dont le centre est H . Son rayon r vérifie le théorème de Pythagore $r^2 + HC^2 = R^2$ et donc $r = \sqrt{40}$.