

Concours blanc - Analyse

Vous devez rendre les deux sujets dans deux copies différentes

Rappel :

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Exercice 1Partie I :

Soit $g : x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Etudier la parité de g sur $\mathbb{R}^*$.
2. Justifier que la fonction est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1.
3. Justifier que la fonction prolongée dans la question **Q2** est dérivable en 0. On donnera la valeur de la dérivée.
4. Déterminer la position relative de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Partie II :

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}, & x \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. On admet que : $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*; \mathbb{R})$.

5. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{x - (1 + x^2) \operatorname{Arctan}(x)}{x^2(1 + x^2)}$$

6. Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{1 + x^2} \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq x$$

7. En déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}_+^*$ puis par parité de f , le signe de f' sur $\mathbb{R}_-^*$.
8. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on mettra les limites sans justification).
9. Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $f(x)$.

Partie III :

On admet les résultats suivants :

$$\checkmark \quad f \text{ est } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$$

$$\checkmark \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\sqrt{1+x^2}^n} \sin\left(\frac{n\pi}{2} - n \operatorname{Arctan}(x)\right)$$

10. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \left| f(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k+1} \right| \leq \frac{1}{2n+1}$$

11. En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge vers une valeur que l'on précisera.

Partie IV :

On note : $\int_0^1 f(x)dx = C$ où C est appelée constante de Catalan.

12. Justifier que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{k}{n}} = C$$

13. En utilisant la question Q6, justifier que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{k}{n}} \leq 1$$

14. Justifier que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{\pi}{4}$$

15. En déduire un encadrement de C .

Partie V :

On cherche une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2}$.

16. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2} dx = - \left[\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} \right] + \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

17. En utilisant le changement de variable, $u = 1 + x^2$, déterminer une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

18. En déduire une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2}$.

Exercice 2

Rappels :

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) \quad (\text{formule de duplication})$$

On considère la série : $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)$.

1. Montrer que :

$$\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

2. En déduire la convergence de la série.

3. En utilisant la formule de duplication avec $x = \frac{1}{2^k}$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) = \ln(\operatorname{sh}(1)) - \ln\left(2^n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$$

4. En déduire la limite de la série.