

ex1

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(-x) = \frac{\text{Arctan}(-x)}{-x} = \frac{-\text{Arctan}(x)}{-x} = g(x)$$

$\uparrow$
 $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ impaire sur $\mathbb{R}$

D'où g paire sur $\mathbb{R}^*$

2) $\frac{\text{Arctan}(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$

3) $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 0x - \frac{x^2}{3} + o(x^3)$

g admet un DL₂(0), donc g prolongée est dérivable en 0, de dérivée 0.

4) $g(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{3} \leq 0$

Eg en dessous de sa Tg₀ d'eq $y=1$

I) 5) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x)}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\text{Arctan}(x)}{x^2(1+x^2)}$

6) soit $h: t \mapsto \text{Arctan}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

soit $x \in \mathbb{R}_+$

$h': t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. $\forall t \in [0, x], \frac{1}{1+x^2} \leq h'(t) \leq 1$

(car h' décroissante sur $\mathbb{R}_+$)

D'après I. A. F (v1)

$\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{1}{1+x^2} (x-0) \leq \text{Arctan}(x) - \underbrace{\text{Arctan}(0)}_0 \leq 1(x-0)$$

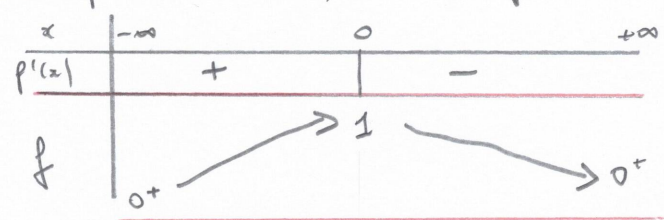
$\Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan}(x) \leq x$

7) D'après Q6,

$\forall x \in \mathbb{R}_+, x - (1+x^2)\text{Arctan}(x) \leq 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) \leq 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ et $1+x^2 \geq 1 > 0$)

da fct f étant paire sur $\mathbb{R}^*$, comme $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$, alors $f \searrow$ sur $\mathbb{R}_-$



D'où, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) \geq 0$

8)

9) $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$

$$f \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| f^{(2n+1)}(x) \right| = \frac{(2n)!}{\sqrt{1+x^2}} \left| \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} - (2n+1) \operatorname{Arctan}(x) \right| \leq (2n)!$$

$$\text{car } \forall x \in [0, 1], \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \quad \text{et } \forall y \in \mathbb{R}, \quad |\sin(y)| \leq 1$$

D'après la f. de Taylor-Lagrange

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} \leq \frac{1}{2n+1}$$

$$\uparrow$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\text{et } \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1}$$

11) On évalue Q10 en $x=1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

$$\text{Donc, theo encadré, } \sum \frac{(-1)^k}{2k+1} \text{ cv vers } \underline{f(1) = \frac{\pi}{4}}$$

12)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ somme de Riemann } \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ f: x \mapsto f(x) \text{ continue sur } [0,1] \end{cases} \text{ cv vers } \int_0^1 f(x) dx$$

$$13) \text{ Q6 avec } x = \frac{k}{n}, \quad k \in [0, n-1] \quad \text{et} \quad \left(\frac{k}{n}\right) \in [0, 1] \subset \mathbb{R}_+$$

$$\frac{\frac{k}{n}}{\frac{k}{n} \times \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}$$

Donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1$$

$$\left(\text{car, } \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n \quad (\text{Attention! } n \text{ termes } 1) \right)$$

$$14) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \text{ somme de Riemann } \begin{cases} a=0, b=1 \\ h: x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \text{ continue sur } [0,1] \end{cases} \text{ cv vers}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\operatorname{Arctan}(x) \right]_0^1 = \underline{\underline{\pi/4}}$$

$$15) \text{ Par passage à la limite, } \underline{C \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]}$$

6) $u : x \mapsto -\frac{1}{x}$, $v : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$, $(u, v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) + \text{I.P.P}$ f3

$u' : x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $v' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

$$\int f(x) dx = \left[-\frac{1}{x} \operatorname{Arctan}(x) \right] - \int -\frac{1}{x} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= - \left[\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} \right] + \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

17) $u = 1+x^2$

$du = 2x dx$, $dx = \frac{1}{2x} du$, $\frac{1}{x} dx = \frac{1}{2x^2} du = \frac{1}{2(u-1)} du$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{2u(u-1)} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u(u-1)} du$$

D.E.S

$$= \frac{1}{2} \left(\int -\frac{1}{u} du + \int \frac{1}{u-1} du \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\ln(u) + \ln(u-1) \right] = \frac{1}{2} \left[-\ln(1+x^2) + \ln(x^2) \right]$$

$$= \ln \left(\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \right)$$

Donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$x \mapsto - \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} + \ln \left(\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \right)$$

ex 2

84

$$1) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = 0, \text{ donc } \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) \underset{k \rightarrow \infty}{=} \ln\left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^k} + o\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)$$

donc

$$\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2^k}\right)^k + o\left(\frac{1}{2^k}\right) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{4^k}$$

$$2) \sum \frac{1}{4^k} \text{ série géom de raison } \frac{1}{4} \in]-1; 1[, \text{ donc cv}$$

Donc, la cv de la série

3) F. duplication

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^k}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^k}\right)$$

$$\text{donc } \ln\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) + \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)$$

$$\text{donc } \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) = -\ln(2) + \left(\ln\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) &= \sum_{k=1}^n -\ln(2) + \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(\ln\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)\right)}_{\text{somme télescopique}} \\ &= \ln\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^0}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) \end{aligned}$$

$$S_n = -n \ln(2) + \ln(\operatorname{sh}(1)) - \ln\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$$

$$S_n = \ln(\operatorname{sh}(1)) - \left(\ln(2^n) + \ln\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\right)$$

$$S_n = \ln(\operatorname{sh}(1)) - \ln\left(2^n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$$

$$4) \operatorname{sh}(x) \sim x, \text{ donc } 2^n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^n}\right)}{1/2^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

donc

$$\text{la série cv vers } \ln(\operatorname{sh}(1))$$