Concours blanc : Algèbre

Vous devez rendre les deux sujets **dans deux copies différentes**

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1) Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Montrer sans effectuer de calculs matriciels que $Vect(I_3, A, A^2) \subset \mathcal{S}$.

3) Soient $(a,b,c,d,e,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^9$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$.

- **a)** Montrer que $\begin{cases} a = e = i \\ d = h \\ b = c = f = 0 \end{cases}$
- **b)** En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera en fonction des coefficients de M tels que $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$ et que $\mathcal{S} \subset Vect(I_3, A, A^2)$.

4) En déduire que $\mathcal{S} = Vect(I_3, A, A^2)$ et donner la dimension de $\mathcal{S}$ que l'on justifiera.

Soit $\mathcal{S}' = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^3 = 0 \text{ et } M^2 \neq 0\}$.

5) On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{S}'$:

- **a)** Vérifier que $A \in \mathcal{S}'$.
- **b)** $\mathcal{S}'$ est-il un espace vectoriel ?
- **c)** Soient $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$

Soit $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On admet (pour éviter des calculs fastidieux) que $N^3 = 0_3$.

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont N est la matrice dans la base canonique.

6) Soit $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- **a)** Calculer NX et N^2X.
- **b)** Montrer que la famille (X, NX, N^2X) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **c)** Déterminer la matrice de f dans la base (X, NX, N^2X).
- **d)** En déduire sans calcul l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}NP = A$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1,2\}$.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\mathcal{B}_n$ la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

On considère l'application f_n qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme

$$f_n(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P$$

Préambule :

0) Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I : dans toute cette partie, $\boldsymbol{n = 3}$.

1) Ecrire la matrice M_3 de f_3 dans la base $\mathcal{B}_3$.

2) Déterminer $Im\, M_3$ et $Im\, f_3$.

3) Déterminer $Ker\, M_3$ et $Ker\, f_3$.

4) $Ker\, f_3$ et $Im\, f_3$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

5) Montrer que f_3 est un projecteur.

Partie II : dans toute cette partie, $\boldsymbol{n = 4}$.

6) Ecrire la matrice M_4 de f_4 dans la base $\mathcal{B}_4$.

7) Montrer que $M_4 = C + R$ où $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et R une matrice que l'on déterminera.

8) Vérifier que $C^2 = C$, $R^2 = 3R$ et $CR = RC = 0_4$.

9) Déterminer le rang de C et le rang de R.

10) Montrer que pour tout entier naturel $p > 0$, la matrice M_4^p est combinaison linéaire de C et R et déterminer les scalaires α_p et β_p tels que $M_4^p = \alpha_p C + \beta_p R$.

Partie III : dans toute cette partie, $\boldsymbol{n \geq 5}$.

11) Soit P un polynôme de degré $k \geq 3$. Montrer que $f_n(P)$ est un polynôme de degré k dont le coefficient dominant est non nul.

12) En déduire que si $P \in Ker\, f_n$, alors $\deg(P) \leq 2$.

13) Déterminer alors $Ker\, f_n$ et justifier que $dim(Ker\, f_n) = 2$.

14) En déduire la dimension de $Im\, f_n$.

15) Déterminer $f_n(1)$, $f_n(X)$, $f_n(X^2)$ et justifier que $(f_n(1), f_n(X^3), f_n(X^4), \dots, f_n(X^n))$ est une base de $Im\, f_n$.

16) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

- **a)** Montrer que si $Q = f_n(P)$, alors $Q' = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P^{(3)}$
- **b)** En déduire que $Q \in Im\, f_n \implies (Q'(1) = Q'(-1) = 0)$

17) On se propose de montrer que $Q \in Im\, f_n \iff (Q'(1) = Q'(-1) = 0)$

Soit $\mathcal{H} = \{Q \in \mathbb{R}_n[X] \,|(Q'(1) = Q'(-1) = 0)\}$.

Soit u l'application qui à tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ associe l'élément de $\mathbb{R}^2$, $\big(Q'(1), Q'(-1)\big)$.

- **a)** Justifier que u est une application linéaire.
- **b)** Donner le lien entre $\mathcal{H}$ et u et déduire que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
- **c)** Montrer que $(u(X), u(X^2))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
- **d)** En déduire la dimension de $Im\, u$, puis de $Ker\, u$ et celle de $\mathcal{H}$.
- **e)** En utilisant **Q16** et **Q17**, en déduire que $Im\, f_n = \mathcal{H}$.