

Révisions CCB

Vingt exercices proposés par M. Scotto

— Exercice 1 ●○○ — Solution proposé par A.M.

1. a. Après calcul du module et d'un argument, on a rapidement la forme exponentielle :

$$z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

- b. La question précédente est adaptée : on a

$$z^n = 4^n e^{i\frac{2n\pi}{3}} = 4^n \left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right).$$

- c. D'après la question précédente :

$$z^n \in \mathbb{R} \iff \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = 0 \iff \frac{2n\pi}{3} \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

N'oublions par que $n \in \mathbb{N}$, ainsi, $z^n \in \mathbb{R}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{2n\pi}{3} = k\pi \iff 2n = 3k.$$

On n'a pas fait beaucoup d'arithmétique, mais on pense que cela est équivalent à ce que n soit multiple de 3. En effet, 3 divise $2n$, et comme 3 est premier avec 2, alors 3 divise n . Réciproquement, si n est multiple de 3, on pose $k = \frac{2n}{3}$ qui est bien un entier.

2. On cherche z sous la forme $z = x + iy$. En appliquant la méthode du cours, on trouve deux solutions :

$$z = 6 - 4i \text{ et } z = -6 + 4i.$$

3. Commençons par résoudre l'équation

$$Z^6 = -4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}, \text{ d'inconnue } Z \in \mathbb{C}.$$

On applique la méthode du cours :

- On met le second membre sous forme exponentielle :

$$-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(-1 + i) = 8e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

- On donne une solution particulière :

$$Z_0 = 8^{\frac{1}{6}} e^{\frac{3i\pi}{24}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

- On se ramène aux racines 6-ème de l'unité :

$$\begin{aligned} Z^6 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{8}} &\iff Z = Z_0^6 \iff \left(\frac{Z}{Z_0}\right)^6 = 1 \iff \frac{Z}{Z_0} \in \{e^{\frac{2ik\pi}{6}}, k = 0, \dots, 5\} \\ &\iff Z \in \{\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3})}, k = 0, \dots, 5\} \end{aligned}$$

Maintenant, revenons à l'équation d'origine. Notons que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ et $Z \neq 1$, on a :

$$Z = \frac{z+2}{z-i} \iff z = \frac{2+iZ}{Z-1}.$$

Ainsi, puisque les solutions de $Z^6 = -4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}$ sont toutes différentes de 1, z est solution de l'équation originale si et seulement si

$$z \in \left\{ \frac{2 + \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3})}}{\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3})} - 1}, k = 0, \dots, 5 \right\}.$$

Notez qu'avec un vocabulaire plus poussé, on a utilisé que $\varphi : z \mapsto \frac{z+2}{z-i}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, et que sa bijection réciproque est $\varphi^{-1} : z \mapsto \frac{2+iZ}{Z-1}$. Les solutions de l'équation d'origine et l'équation auxiliaires sont en bijection. Ce n'est pas toujours le cas, et cela crée des subtilités, voir par exemple exo6, DS2, 2023.

4. On remarque que $P(2) = 0$. Cela vaut coup de voir si c'est une racine double : on a $P'(z) = 4z^3 - 12z^2 + 10z - 4$ et donc après calculs, $P'(2) = 0$. Comme 2 est racine double, on peut factoriser P par $(z-2)^2$. Le plus efficace est une division euclidienne, et on trouve :

$$P(z) = (z-2)^2(z^2 + 1).$$

C'est la factorisation irréductible sur \mathbb{R} , tandis que sur \mathbb{C} , on a aussi :

$$P(z) = (z-2)^2(z-i)(z+i).$$

Remarque : Il était aussi naturel de tester si i était racine évidente, on voit que c'est le cas, et puisque P est à coefficient réel, son conjugué $-i$ est aussi racine, et pour des raisons de degré, on a toutes les racines sur \mathbb{C} .

— Exercice 2 ●○○ —

Fait et refait, voir cours. Après calculs, on trouve :

$$\int^x \cos^3 t \, dt = \frac{3}{4} \sin(x) + \frac{1}{12} \sin(3x)$$

— Exercice 3 ●●○ — Solution proposé par A.M.

L'énoncé de l'exercice n'avait pas été prévu tel quel, une solution est toujours possible, mais nécessite pour être fait rapidement l'usage de la calculatrice.

1. On peut montrer les inégalités à la main en étudiant la différence, mais c'est assez laborieux. Pour ce type d'inégalité, le TAF (ou sa version IAF) doit être privilégiée (mais on ne sait pas s'il va donner les deux côtés ou un seul). En effet, la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ est dérivable sur $[0, 1[$, et pour $x \in [0, 1[$, le TAF appliqué entre 0 et x nous donne :

$$\exists c \in [0, x] : f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c) \text{ et donc } : \text{Arcsin}(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

On ne connaît pas c mais on va l'encadrer. Si $x \leq \frac{4}{5}$, alors $0 \leq c \leq \frac{4}{5}$, et par décroissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ sur $[0, 1]$:

$$0 \leq \sqrt{1 - c^2} \leq \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

et donc par passage à l'inverse :

$$\forall x \in [0, \frac{4}{5}] : \text{Arcsin}(x) \geq \frac{5}{3}x.$$

L'autre inégalité ne semble pas découler du TAF, puisque $c \in [0, x]$ ne pourra pas être minorée. On étudie la différence : on introduit

$$D : x \mapsto \text{Arcsin}(x) - \frac{5}{4}x,$$

et on l'étudie. On a $D'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{5}{4}$, or on a rapidement que

$$x \geq \frac{3}{5} \implies \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq \frac{5}{4} \text{ et } D'(x) \geq 0.$$

Ainsi, D est croissante sur $[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}]$. Or (calculatrice nécessaire) :

$$D\left(\frac{4}{5}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) - 1 \approx -0,07 < 0.$$

Cela prouve que $D < 0$ sur $[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}]$, ce qui donne l'inégalité voulue.

2. On applique l'inégalité précédente avec $x = \frac{7}{10}$.

— Exercice 4 ●○○ —

— Exercice 5 ●○○ —

1. Faire une (et une seule IPP). On trouve après calculs :

$$\int^x t^3 \ln(t) \, dt = \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{x^4}{16}.$$

2. Le mieux : écrire $\sin(2x)e^{-x} = \text{Im}(e^{(-1+2i)x})$. Primitiver l'expo et récupérer la partie imaginaire. Le moins bien : la double IPP et on retrouve la primitive d'origine.
3. Le polynôme $X^2 + 4X + 5$ a un discriminant négatif. Réflexe!! Forme canonique :

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1.$$

Poser alors $u = x + 2$. On trouve après calcul :

$$\int^x h(t) \, dt = \text{Arctan}(x + 2).$$

Celui est gentil car après mise sous forme canonique on trouve $+1$, savez-vous faire le cas général ?

4. Comme pour le \ln , on fait l'IPP masquée. On reconnaît dans la nouvelle intégrale $\frac{u'}{u}$:

$$\int^x i(t) \, dt = \int^x 1 \times \text{Arctan}(t) \, dt = x \text{Arctan}(x) - \int^x \frac{t}{1+t^2} \, dt = x \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

— Exercice 6 ●○○ —

— Exercice 7 ●○○ — Déjà, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+3x}$ est bien définie sur $] -\frac{1}{3}, +\infty[$. Ensuite, après quelques calculs de dérivées, première et seconde, et intuition la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)} = \frac{(-1)^n 3^n n!}{(1+3x)^{n+1}}.$$

On prouve cette formule par récurrence (faites-le, c'est assez direct).

Remarque : Le calcul de la dérivée n -ième de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ a été fait plusieurs fois.

Exercice 8 ●●○

1. La fonction Arctan est bien définie sur \mathbb{R} , donc le numérateur est bien définie sur \mathbb{R} . Quand le dénominateur s'annule-t-il ? On a :

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = 0 \iff 1+x^2 = 1 \iff x = 0.$$

Ainsi, f est définie sur \mathbb{R}^* .

2. Il faut voir si f admet une limite en 0. Alors, DL ou équivalents ? On peut commencer par sécuriser des points avec des équivalents (plus simple) pour trouver cette limite et peut-être mieux. On a

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x^2} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2,$$

donc par quotient d'équivalents :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{\frac{1}{2}x^2} = 2x.$$

On a donc un DL à l'ordre 1 :

$$f(x) = 2x + o(x),$$

ce qui prouve que f admet un prolongement continue et même dérivable en 0, avec

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 2.$$

De plus, la fonction admet pour tangente en 0 la droite d'équation $y = 2x$.

Pour la position relative, on fait un DL à un ordre suffisant (ce qu'on aurait pu faire dès le début). On a les DL en 0 :

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4),$$

et donc en injectant les DL et en simplifiant :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2))}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)} \\ &= \frac{x(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2))}{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{2x(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2))}{1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)} \\ &= 2x(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2))(1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2x(1 - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)) \\ &= 2x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$f(x) - 2x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6}x^3.$$

Donc $f(x) - 2x$ est du même signe que $-\frac{1}{6}x^3$ dans un voisinage de 0. Or :

$$\begin{cases} -\frac{1}{6}x^3 > 0 & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{6}x^3 < 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On déduit que, dans un voisinage de 0, \mathcal{C}_f est au dessus de sa tangente à gauche de 0 et au dessous à droite de 0.

3. La fonction f est clairement $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$. Il faut étudier en 0. On peut appliquer le théorème de la limite de la dérivée, on calcule au préalable $f'(x)$ pour $x \neq 0$ et on regarde sa limite en 0 à l'aide d'un DL.
4. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$, il est assez facile de voir que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}x$, mais on sait qu'il faut obtenir un résultat du type $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + o(1)$, et même plus si on veut la position relative. Le problème est qu'il faut alors déterminer un développement plus poussé de Arctan en $+\infty$. On forme la différence, et on pense à une formule du cours (savez-vous la montrer ?) :

$$\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2} = -\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\text{Arctan}(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h + o(h^2)$:

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'un autre côté, préparons le développement du dénominateur :

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 = x\left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - 1 = x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \times \frac{1}{x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= x \times \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\pi}{2}x - 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \times \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\
 &= \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{\frac{\pi}{4} - 1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

Déjà, cela prouve que la courbe de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. De plus, on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{4} - 1}{x} < 0,$$

donc la courbe de f est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

— Exercice 9 ●○○ —

— Exercice 10 ●●○ — Du n et du k dans la somme? ça sent la somme de Riemann. On nous parle d'équivalent? Pas de panique : faisons apparaître une somme de Riemann et on avisera après :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^3} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}}{n^3} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Posons $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$, qui est bien définie et continue sur $[0, 1]$, alors le théorème des sommes de Riemann nous dit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt.$$

Cette dernière intégrale étant strictement positive (et donc non nu), on peut déjà répondre en divisant cela par n :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{I}{n}, \text{ avec } I = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt.$$

Il reste à calculer la constante I (si on arrive là on a déjà pas mal de points). C'est classique : on fait le changement de variable $t = \sin u$, logique avec ce $\sqrt{1 - t^2}$ qui fait penser à la formule $1 - \sin^2 = \cos^2$. Pour être très précis, le changement de variable est donné par $\varphi : t \mapsto \text{Arcsin}(t)$, de $[0, 1]$ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a alors $dt = \cos u du$, et :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos u| \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2u) + 1}{2} du = \frac{\pi}{4} \text{ après calculs.}$$

Notez que $t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$, définie sur $[0, 1]$, est la paramétrisation d'un quart de cercle, et l'intégrale (aire sous la courbe) est bien le quart de l'aire du disque.

— Exercice 11 ●○○ —

— Exercice 12 ●○○ —

— Exercice 13 ●○○ —

— Exercice 14 ●●○ —

1.

2. a. Après calculs :

$$A^2 - 3A + 2I_2 = 0.$$

Cela donne :

$$3A - A^2 = 2I_2 \iff \frac{1}{2}(3I_3 - A) \times A = I_2.$$

Cela prouve que A est inversible.

b. La question précédente prouve que

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_3 - A).$$

— Exercice 15 ●○○ —

— Exercice 16 ●○○ —

1. On peut commencer par le noyau ou l'image, les deux ont leurs avantages et leurs inconvénients. Commençons par le noyau : on cherche $M \in \ker(u)$ sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \text{ On a alors :}$$

$$M \in \ker(u) \iff u(M) = 0 \iff \begin{pmatrix} a-d & b-d \\ a-b & 2a-b-d \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a-d=0 \\ b-d=0 \\ a-b=0 \\ 2a-b-d=0 \end{cases}$$

$$\iff a = b = d \text{ (la dernière ligne devient } 2d - d - d = 0 \text{ et ne donne rien)}$$

Ainsi,

$$\ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ c & a \end{pmatrix}, \text{ avec } (a, c) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } (a, c) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ étant formée de deux matrices non colinéaires, elle est libre, et forme donc une base de $\ker(u)$. En particulier, $\dim(\ker(u)) = 2$. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Im}(u)) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(\ker(u)) = 4 - 2 = 2.$$

Déterminons donc $\text{Im}(u)$ par transfert de base. Une base de $M_2(\mathbb{R})$ est donnée par

$$(E_{ij})_{i,j} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Im}(u) &= \text{Vect} \left(u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; u \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; u \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; u \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Or on sait que $\dim(\text{Im}(u)) = 2$, donc une base est composée de deux éléments. Ainsi une famille de deux éléments qui est libre est aussi génératrice. Il suffit donc d'extraire de la famille ci-dessus une famille libre de deux éléments, par exemple les deux premiers, et on a donc :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

2. Déjà, d'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(M_2(\mathbb{R}))$. Ainsi, on a $M_2(\mathbb{R}) = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$ si et seulement si $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.

Déterminons donc $\ker(u) \cap \text{Im}(u)$. Soit $M \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$. Comme $M \in \text{Im}(u)$, d'après la question précédente, on l'écrit :

$$M = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha - \beta & 2\alpha - \beta \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$M \in \ker(u) \iff u(M) = 0 \iff \begin{pmatrix} \alpha - (2\alpha - \beta) & \beta - (2\alpha - \beta) \\ \alpha - \beta & 2\alpha - \beta - (2\alpha - \beta) \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{cases} -\alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta.$$

Finalement, $\ker(u) \cap \text{Im}(u) \neq \{0\}$ et donc ces deux sous-espace vectoriel ne sont supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$. Pour être précis, on vient de montrer que

$$\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier, $\dim(\ker(u) \cap \text{Im}(u)) = 1$, et la formule de Grassman nous dit que $\dim(\ker(u) + \text{Im}(u)) = 2 + 2 - 1 = 3$.

— Exercice 17 ●●● —

Pour la première série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+1}{n+3} \right)^{n^2}$, attention à ne pas conclure trop vite que la limite du terme général est 1 (piège classique). On écrit plutôt :

$$\left(\frac{n+1}{n+3} \right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right)},$$

et on fait le DL de ce qu'il y a dans l'expo, par rapport à a variable $\frac{1}{n}$, et puisqu'on va tout multiplier par n^2 , on va à l'ordre 2. On a :

$$\frac{n+1}{n+3} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis avec le DL de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right) = n^2 \ln\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n^2 \left(-\frac{2}{n} + \frac{6}{n^2} - \frac{4}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -2n + 6 + o(1).$$

On déduit :

$$\left(\frac{n+1}{n+3} \right)^{n^2} = e^{-2n+6+o(1)} = e^6 e^{-2n} e^{o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^6 e^{-2n}.$$

Or, la série $\sum_{n \geq 0} e^{-2n}$ est une série géométrique de raison $e^{-2} \in]-1, 1[$, elle est donc

convergente. Par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+1}{n+3} \right)^{n^2}$ converge elle aussi.

Pour la première série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, observer que la série sans le $(-1)^n$ est proche d'une série de Riemann. En effet :

$$\left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \right| = \frac{1}{n^2 + 2n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \right|$ converge elle aussi. On dit que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ est absolument convergente (convergente « en valeur absolue »), et d'après le cours elle est alors convergente.

Notez que ce deuxième cas, quoique facile, est à la limite du programme de première année.

— Exercice 18 ●○○ —

— Exercice 19 ●○○ —

— Exercice 20 ●●○ — (Solution proposée par K. B.)

Déjà, on s'assure que c'est bien l'inégalité de Taylor-Lagrange à appliquer : la fonction $f : x \mapsto \tan(x)$ est de classe C^∞ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et on a le DL au voisinage de 0, à l'ordre 4 :

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Notez que le terme d'ordre 4 est nul car la fonction est impaire.

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors (la formule du cours est appliquée avec $n = 4$ et $a = 0$) :

$$\forall x > 0 : \left| f(x) - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) \right| \leq \frac{|x-0|^5}{120} M, \text{ avec } M = \max_{[0,x]} |f^{(5)}|.$$

On ne voit pas d'autres options que de calculer frontalement les dérivées (mais on a en tête que cela n'est pas si horrible grâce à la formule $\tan' = 1 + \tan^2$) : On a

$$\begin{cases} f'(x) = 1 + \tan^2(x) \\ f''(x) = 1 + 2 \tan(x) + 2 \tan^3(x) \\ f^{(3)}(x) = 2 + 8 \tan^2(x) + 6 \tan^4(x) \\ f^{(4)}(x) = 16 \tan(x) + 40 \tan^3(x) + 24 \tan^5(x) \\ f^{(5)}(x) = 16 + 136 \tan^2(x) + 240 \tan^4(x) + 120 \tan^6(x) \end{cases}$$

Or, on cherche le maximum de cette fonction, et comme l'énoncé demande une inégalité pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on va calculer le maximum sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. La fonction \tan étant croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, à valeurs positives, et les fonctions $x \mapsto x^n$ étant croissantes sur $[0, +\infty[$, les fonction $x \mapsto \tan^n(x)$ sont croissantes sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, et donc par somme, la fonction $\tan^{(5)}$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Son maximum est donc atteint en $\frac{\pi}{4}$, et on a donc :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}], \quad 0 \leq \tan^{(5)}(x) \leq \tan^{(5)}(\frac{\pi}{4}) = 16 + 136 + 240 + 120 = 512$$

On utilise alors l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}] : \left| f(x) - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) \right| &\leq \frac{|x-0|^5}{120} \max_{[0,x]} |f^{(5)}| \\ &\leq \frac{|x-0|^5}{120} \max_{[0, \frac{\pi}{4}]} |f^{(5)}| \\ &= \frac{x^5}{120} \times 512 = \frac{64x^5}{15}. \end{aligned}$$

Pour aller plus loin : Ce calcul des dérivées de tangente donne envie de généraliser. Il semble que la dérivée n -ième soit un polynôme en \tan .

On construit cette suite par récurrence. Plus précisément, montrons par récurrence la propriété :

$$\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)).$$

- Initialisation : on pose $P_0 = X$, qui convient.
- Hérité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n construit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)).$$

On dérive :

$$\tan^{(n+1)}(x) = (1 + \tan^2(x))P_n'(\tan(x)).$$

On définit donc le polynôme P_{n+1} par :

$$P_{n+1} = (X^2 + 1)P_n'.$$

Ce polynôme vérifie bien la propriété au rang $n + 1$.

Finalement, la propriété est vraie, et on a obtenu la formule

$$P_{n+1} = (X^2 + 1)P_n'.$$

Cette formule permet en outre de montrer par récurrence que $\deg(P_n) = n + 1$, et que le coefficient dominant est $n!$.

Bien sûr, ceux qui auraient donné la formule pour P_n sans rédiger la récurrence auraient des points... on peut utiliser la phrase synthétique « on construit la suite de polynôme par la relation de récurrence $P_{n+1} = (X^2 + 1)P_n'$ ». Mais c'est moins rigoureux.