ea 4

1) $y' + \frac{1}{x} y = -\frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0;+\infty[= I$

SH : soit $a : x \mapsto \frac{1}{x}$; soit A une primitive sur I de a ; par ex

$A : x \mapsto \ln(x)$

$y_H : x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

soit $y_H : x \mapsto \frac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

SP : On utilise la MVC, en cherchant une sol part sous la forme

$y_P : x \mapsto \lambda(x)/x$

y_P sol ssi $\frac{\lambda'(x)}{x} = -\frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$

$\lambda'(x) = -2 + \ln(x)$

Une fct sol est : $\lambda : x \mapsto -2x + x\ln(x) - x$

D'où

$y_P : x \mapsto -3 + \ln(x)$ est une sol part

SG : $y : x \mapsto \frac{\lambda}{x} - 3 + \ln(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ex 4

2) $y'' + 5y' + 4y = 2xe^{4x} - e^{3x}$

SH : Le poly caract $r^2 + 5r + 4 = (r+1)(r+4)$

$y_H : x \longmapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-4x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

SP : Procédons par superposition des sols

a) Résolvons $y'' + 5y' + 4y = 2xe^{4x}$

Cherchons une sol ss la forme $y_p : x \longmapsto (ax+b)e^{4x}$

y_p sol ssi $e^{4x}(8a + 16ax + 16b + 5a + 20ax + 20b + 4ax + 4b) = 2xe^{4x}$

y_p sol ssi $40ax + 13a + 40b = 2x$

$$\begin{cases} a = 1/20 \\ b = -13/800 \end{cases}$$

$y_p : x \longmapsto \left(\frac{1}{20}x - \frac{13}{800}\right)e^{4x}$.

b) Résolvons $y'' + 5y' + 4y = -e^{3x}$

Cherchons ... $y_p : x \longmapsto ce^{3x}$.

y_p sol ssi $9c + 15c + 4c = -1$

$c = -1/28$

$y_p : x \longmapsto -\frac{1}{28}e^{-3x}$

Par superposition

$y_p : x \longmapsto \left(\frac{1}{20}x - \frac{13}{800}\right)e^{4x} - \frac{1}{28}e^{-3x}$.

SG :

$y : x \longmapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-4x} + \left(\frac{1}{20}x - \frac{13}{800}\right)e^{4x} - \frac{1}{28}e^{-3x}$

ex 6

a) $\begin{cases} x = sh(t) \\ dx = ch(t)dt \end{cases}$, où $t \mapsto sh(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx \underset{1+sh^2(t)=ch^2(t)}{=} \int \frac{sh^2(t)}{\sqrt{ch^2(t)}} ch(t)dt \underset{(\text{rappel: } \forall t \in \mathbb{R},\ ch(t) \geq 1 > 0)}{=} \int \frac{sh^2(t)\cancel{ch(t)}}{\cancel{ch(t)}} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int (ch(2t) - 1)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} sh(2t) - t\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[sh(t)ch(t) - t\right] = \frac{1}{2}\left[sh(t)\sqrt{1+sh^2(t)} - t\right]$$

Reste à exprimer t en fct de x (ie trouver la réciproque de sh)

Deux options, • le faire (soit $y \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$, $sh(x) = y$ ...)

• accepter le résultat sh^{-1}, noté Argsh: $t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2+1})$

d'où

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})\right]$$

(pas du tout une évidence :))

b)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times x \, dx \overset{\text{I.P.P}}{=} \left[x\sqrt{x^2+1} \right] - \int \sqrt{x^2+1} \, dx$$

$u' : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $v : x \mapsto x$

$u : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$; $v' : x \mapsto 1$

$(u,v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l} x = sh(t) \\ dx = ch(t)dt \end{array}\right\} \text{ comme Qa}$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \, dx = \int ch^2(t)dt = \int \frac{1}{2}(ch(2t)+1)dt$$

$$= \left[\frac{1}{4} sh(2t) + \frac{1}{2} t \right] = \left[\frac{1}{2} sh(t)ch(t) + \frac{1}{2} t \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} sh(t)\sqrt{1+sh^2(t)} + \frac{1}{2} t \right]$$

d'où

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\underbrace{x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} x\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2+1} - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \right]$$

Rem

« x cas » vous donne

$$\frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) \right]$$

ce qui voudrait dire que

$$-\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad !$$

Or

$$\ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left(\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)$$

$$= \ln(-x^2 + x^2 + 1)$$

$$= \ln(1)$$

$$= 0$$

ex 9

1) $$S_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\underbrace{\left(\ln(k)-\ln(k-1)\right)}+\underbrace{\left(\ln(k)-\ln(k+1)\right)}\right)$$ 2 sommes télescopiques

$$= \underbrace{\ln(n)-\ln(1)} \quad + \ln(2)-\ln(n+1)$$

$$= -\left(\ln(n+1)-\ln(n)\right)+\ln(2)$$

$$= -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln(2)$$

(La somme cv vers $\ln(2)$!)
c'est beau les maths

2) $$S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+\binom{n+1}{0}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}\right)}_{\text{f. Pascal}}+1 = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}+1$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}+\underbrace{1}_{\text{or, } 1=\binom{n}{n}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = 2^n$$

ex 11

1) Montrons par recurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2.) = (P_n)$

$\underline{I}$: $u_0 = 2, \quad u_1 = \frac{2}{3}$, d'où $0 \leq \frac{2}{3} \leq 2 \leq 2$

(P_0) vraie

$\underline{H}$: Soit $n \in \mathbb{N}$, supp (P_n) vraie et mq (P_{n+1}) vraie

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$

$f \nearrow$ sur $[0, 2]$

Or, $\quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$

$0 = f(0) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2} \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(2) = \frac{2}{3} \leq 2$

Prop hereditaire

d'où $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (P_n)$ vraie

$(u_n) \searrow$ minoree, T.L.M, (u_n) cv vers ℓ $(\ell \in [0, 2], \hat{m}\ [0, \frac{2}{3}])$

f continue sur $[0, 2]$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$, d'où par passage à la limite

$\ell = f(\ell) \iff \ell = \frac{\ell}{1+\ell} \iff \ell \left(1 - \frac{1}{1+\ell}\right) = 0$

$\iff \ell \times \frac{\ell}{1+\ell} = 0 \iff \ell = 0$

D'où (u_n) cv vers 0

2) $u_0 = \frac{2}{1}$; $u_1 = \frac{2}{3}$; $u_2 = \frac{2}{5}$; $u_3 = 2/7$; $u_4 = 2/9$

Conjecture + rec : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2}{2n+1}$

ex 12

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 6y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} z \\ y = -\frac{2}{3} z \\ z = z \end{cases}$$

$$E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E + F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3$$

Or

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc f libre de 3 vect ds $\mathbb{R}^3$ e.v de dim 3

Donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$

ex 13

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -8 & -7 & 7 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d'où $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in F \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} \lambda = x_1 \\ 3\mu = x_1 + x_2 \\ 2\mu = x_3 - x_1 \\ -3\mu = x_4 - 2x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = x_1 \\ 3\mu = x_1 + x_2 \\ 0 = x_3 - x_1 - \frac{2}{3}(x_1 + x_2) \\ 0 = x_4 - 2x_1 + x_1 + x_2 \end{cases}$

D'où

$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} -\frac{5}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

---

3) Soit $X \in E \cap F$

Comme $X \in F$, $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 4\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$

Comme $X \in E$, X vérifie les eq carac de E : $\begin{cases} -\frac{5}{3}\lambda - \frac{2}{3}\lambda + 4\lambda = 0 \\ -\lambda + \lambda + 2\lambda = 0 \end{cases} \iff \lambda = 0$

D'où, $E \cap F = \{0\}$

Donc E et F en somme directe

Evidt, E et F ne sont pas supp ds $\mathbb{R}^4$ car $\dim E + \dim F = 2 + 1 = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$ } on n'avait pas besoin de faire autre chose que sa ex 15 $\quad f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ (clair^t)

Déterminons $\mathrm{Im} f$ par « transport » de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$

$f(1) = 12$; $f(X) = 12X - 2X - 10X = 0$

$f(X^2) = 12X^2 - 4X^2 - 2X^2 = 6X^2$

$f(X^3) = 12X^3 - 6X^3 - 6X^3 + 6 = 6$

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(1, X^2)$

D'après le T. Rang, $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}_3[X]$

d'où, $\dim \mathrm{Ker} f = 4 - 2 = 2$

or

$f(X) = 0$

et

$f(1 - 2X^3) = f(1) - 2f(X^3) = 12 - 2 \times 6 = 12 - 12 = 0$

d'où $\quad \mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(X, 1 - 2X^3)$

Q +

$$\underbrace{\mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f}_{} = \mathbb{R}_3[X]$$

voyez-vous pourquoi ? (poly de degrés ...) :)

La vie est si belle

ex 18

1) Principe multiplicatif : $4 \times 3 \times 5 = 60$

2) $9!$

3) a) $\binom{35}{3}$

b) $\binom{9}{1}\binom{26}{2}$! surtout pas $\binom{34}{2}$

4) a) $\binom{38}{8}$

b) $\binom{20}{8}$

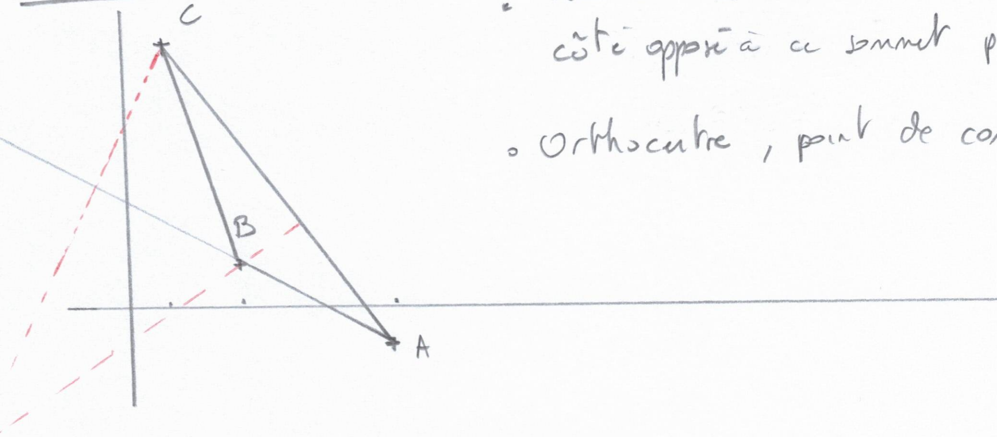
c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\binom{38}{8} - \binom{20}{8} - \binom{18}{8}$$

Si vous voulez « frontal »

$$\sum_{k=1}^{7} \binom{20}{k}\binom{18}{8-k}$$

ex 19



- Hauteur issue d'un sommet est la perpendiculaire au côté opposé à ce sommet passant par le sommet

- Orthocentre, point de concours des 3 hauteurs

Hauteur issue de C $= \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;/\; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \right\}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \iff \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-7 \end{pmatrix} = 0 \iff -4x + 4 + 2y - 14 = 0$

$\iff 2x - y + 5 = 0$

Hauteur issue de B $= \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;/\; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \right\}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \iff \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0 \iff -6x + 18 + 8y - 8 = 0$

$\iff 3x - 4y - 5 = 0$

Intersection

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x - 4y - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$H\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$