Devoir maison

<u>Exercice 1</u> :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1) Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1+u_n \end{pmatrix}$.
2) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n.

<u>Exercice 2</u> :

Résoudre le système en discutant suivant la valeur du paramètre réel m :

$$\begin{cases} x + my + mz = -1 \\ mx + y + mz = -1 \\ m^2x + my + (2m^2 - m)z = -m^2 \end{cases}$$

<u>Exercice 3</u> :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+5x^2-4x-2}{x^2+x-2}$
2) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \frac{sin(x)-cos(x)}{sin(4x)}$

<u>Exercice 4</u> :

On considère la suite $(u_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2), \forall\, n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1) A l'aide d'une représentation graphique, justifier (sans démontrer et en utilisant des couleurs) que :
   - **a)** Si $u_0 \in]-\infty\,, -2[\, \cup\,]1\,, +\infty[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et diverge vers $+\infty$.
   - **b)** Si $u_0 \in]-2\,, -1\,[\, \cup\,]0\,, 1[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.
   - **c)** Si $u_0 \in]-1\,, 0\,[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 0.
   - **d)** Si $u_0 \in \{-2\,, 1\}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire.
   - **e)** Si $u_0 \in \{-1\,, 0\}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de montrer le cas **1.b**.
Pour cela, on considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + x^2)$.

2) Donner (sans justification) les variations de f .
3) Déterminer $f(]-2\,, -1\,[\, \cup\,]0\,, 1[)$.
4) En déduire que $u_1 \in]0\,, 1[$.
5) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq 1$.
6) En utilisant les variations de la fonction f, en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
7) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
8) Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.