DM "d'octobre" Inégalités, valeurs absolues, études de fonctions

Consigne : Aucun exercice n'est vraiment dur. S'assurer que la rédaction est parfaite, utiliser des quantificateurs et des mots ou symboles mettant en évidence vos raisonnements.

Exercice 1 ○○○ **Cours du lycée et valeur absolue** Assurer-vous de savoir déterminer les racines, les variations et le minimum (ou maximum) d'un polynôme de degré 2, et de savoir le tracer.

S'entrainer avec le polynôme $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

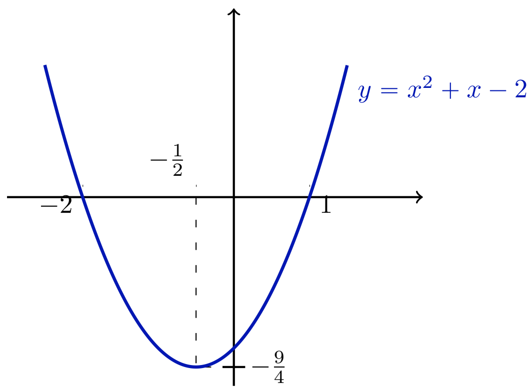
$$P(x) = x^2 + x - 2.$$

En particulier :

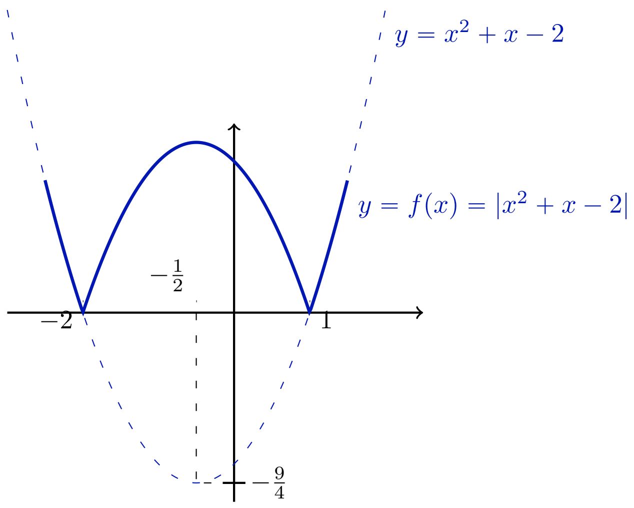
1. Trouver ses racines, si possible "à vue", et le factoriser "par ses racines".
2. Exploiter la forme canonique pour donner le minimum et les variations, sans calculer la dérivée. Que vaut $P(\mathbb{R})$?
3. La fonction P est-elle une bijection ? (On justifiera la réponse).
4. Tracer la courbe de P, puis tracer la courbe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto |P(x)|$.
5. Résoudre l'inéquation
$$f(x) \geqslant \frac{9}{4}$$

Correction : :
Méthode : Voir un cours du lycée, et la corrction détaillée ci-dessous.
Détails :

1. Puisqu'on nous suggère de chercher des racines "évidentes", on essaye des valeurs entières. On sait que le produit des racines vaut le coefficient constant : -2. Ainsi, on teste les paires $(2, -1)$ et $(-2, 1)$, et on constate que c'est cette dernière paire qui fonctionne :
$$\text{Les racines sont } \; r_1 = -2 \; \text{ et } \; r_2 = 1.$$
On peut alors "factoriser par les racines" :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - r_1)(x - r_2) = (x + 2)(x - 1).$$
2. On écrit la forme canonique, en reconnaissant en $x^2 + x$ le début d'une identité remarquable :
$$P(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}.$$
Cette écriture donne le minimum et les variations de P : la fonction P est décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$, croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. Elle a un minimum global en $x = -\frac{1}{2}$, et ce minimum vaut $-\frac{9}{4}$.
On peut ainsi la tracer, noter en particulier que la forme canonique indique que le graphe de P se déduit de la parabole $x \mapsto x^2$ par une translation de $-\frac{1}{2}$ selon l'axe des abscisses et de $-\frac{9}{4}$ selon l'axe des ordonnées.



3. Classique. Si ce n'est pas su, réclamez !
4. Il est clair que P n'est pas bijective, en effet, par lecture du tableau, si $y < -\frac{9}{4}$, alors y, n'a aucun antécédents. On peut aussi utiliser que si $y > -\frac{9}{4}$, alors y a deux antécédents, lesquels se trouvent en résolvant $P(x) = y$, à coup de Δ.
5. On a
$$f(x) = \begin{cases} P(x) & \text{si } \; P(x) \geqslant 0 \\ -P(x) & \text{si } \; P(x) \leqslant 0 \end{cases}.$$
On trace donc f en reportant dans la partie supérieure du plan $x \mapsto P(x)$ là où $P \geqslant 0$, et le symétrisé de P par rapport aux abscisses sinon.



6. On raisonne selon le signe de P, qui a été déterminé aux questions précédentes :

- Si $x \leqslant -2$, on a $P(x) \geqslant 0$, et $f(x) = P(x)$, on a alors
$$f(x) \geqslant \frac{9}{4} \iff x^2 + x - 2 \geqslant \frac{9}{4} \iff 0 \leqslant x^2 + x - \frac{17}{4}.$$
Une étude rapide de trinôme montre que $x \mapsto x^2 + x - \frac{17}{4}$ a pour racine
$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$
Ainsi, $x^2 + x - \frac{17}{4} \geqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant x_1$ ou $x \geqslant x_2$. Puisqu'on travaille sur $]-\infty, -2]$, et que $x_1 < -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$, et que $-2 < x_2$, on a
$$\begin{cases} f(x) \geqslant \frac{9}{4} \\ x \leqslant -2 \end{cases} \iff x \in]-\infty, x_1].$$
- Si $-2 \leqslant x \leqslant 1$, on a $P(x) \leqslant 0$, et $f(x) = -P(x)$, on a alors
$$f(x) \geqslant \frac{9}{4} \iff -(x^2 + x - 2) \geqslant \frac{9}{4} \iff -\frac{9}{4} \leqslant P(x).$$
Surtout ne pas refaire de calcul, on sait que $-\frac{9}{4}$ est le minimum de P, atteint en $-\frac{1}{2}$. Puisque $-\frac{1}{2} \in [-2, 1]$, on a
$$\begin{cases} f(x) \geqslant \frac{9}{4} \\ -2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \iff x = -\frac{1}{2}.$$
- Si $x \geqslant 1$, on a $P(x) \geqslant 0$, et $f(x) = P(x)$. On reprend les calculs et raisonnements du premier point et on obtient
$$\begin{cases} f(x) \geqslant \frac{9}{4} \\ x \geqslant 1 \end{cases} \iff x \in]x_2, +\infty].$$

En conclusion, l'ensemble des solution est
$$\mathcal{S} =]-\infty, x_1] \cup \{-\frac{1}{2}\} \cap [x_2, +\infty[.$$

Exercice 2 ●●○ — La fonction sh avant l'heure

Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle est bijective, et calculer la bijection réciproque. On pourra poser $X = e^x$ pour résoudre $y = g(x)$.

Correction :

Notons sh la fonction à étudier. Il est rapide que la fonction sh est strictement croissante, avec
$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty.$$
Elle est de plus continue, ce qui permet d'appliquer le théorème de la bijection : cette fonction est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et donc pour $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = \operatorname{sh} x$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$.

Résolvons maintenant cette équation : on a
$$y = \operatorname{sh} x \iff e^x - e^{-x} = 2y \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$
On introduit la nouvelle inconnue $X = e^x$, qui vérifie $X > 0$ en tant qu'exponentielle. Ainsi, x est solution si et seulement si X est solution de l'équation
$$X^2 - 2yX - 1 = 0,$$
d'inconnue $X \in]0, +\infty[$. On résout cette équation par le calcul du dicriminant $\Delta = 4y^2 + 4$. On a $\Delta > 0$, et donc on a deux racines :
$$X^+ = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad X^- = y - \sqrt{y^2 + 1}.$$
Rappelons que l'on a posé $X = e^x$, et donc on cherche les solutions strictement positives. Or, on a
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad y < \sqrt{y^2} < \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad X^- < 0,$$
et donc on peut éliminer la solution X^-. On montre de même que $X^+ > 0$, ainsi, on obtient une unique solution X^+ à notre problème, puis on déduit de $X = e^x$ la solution :
$$x = \ln(X^+) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$
Ainsi, la fonction $g(x) = \operatorname{sh} x$ a pour bijection réciproque
$$g^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$
Cette fonction est des fois appelée *argsh*.

Exercice 3 ●●○ — On prépare le cours

On souhaite étudier la fonction tan : $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

1. Justifier que cette fonction est bien définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, étudier sa parité, et donner sa dérivée.
2. Montrer qu'elle définit une bijection, notée f, de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur un ensemble à déterminer (on n'essayera pas de "calculer" sa réciproque).
3. Déterminer $f^{-1}(1)$.
4. Calculer une expression pour $(f^{-1})'(x)$ (sans expression pour f^{-1} !). On aura remarqué que $f' = 1 + \tan^2$.

Correction : :

Méthode :

1. Le dénominateur ne doit pas s'annuler.
2. Standard : on dresse les variations sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour lire l'ensemble d'arriver, et conclure avec le théorème de la bijection.
3. On doit chercher $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x = 1$. Ouvrir les yeux...
4. Appliquer la formule du cours.

Détails :

1. On a :
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \cos \neq 0,$$
et donc la fonction tan est bien définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, comme quotient de fonctions dont le dénomunateur ne s'annule pas.
Pour aller plus loin On peut en fait définir tan sur :
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$
On peut écrire cet ensemble comme une union (infinie) d'intervalles :
$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[.$$
On verra cela dans le cours.
2. On montre que la fonction est impaire :
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$
Calculons sa dérivée, en dérivant simplement la fraction :
$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$
Ainsi, on a $\tan' > 0$, et la fonction est donc strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Pour le calcul des limites, on a
$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+ \end{cases}, \quad \text{et donc } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$$
Puis par parité, $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$.
Ainsi, la fonction f est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, strictement croissante, elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur son image $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$, qui vaut $]-\infty, +\infty[$ d'après le calcul des limites.
3. On doit trouver $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(x) = 1$. Or :
$$f(x) = 1 \iff \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \iff \sin x = \cos x.$$
On voit (on peut s'aider du cercle trigo) que $x \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\pi]$, et donc la solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $\frac{\pi}{4}$. Ainsi : $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.
4. On applique la formule :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
Or on a vu que $f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + f(x)^2$, et puisque $f^{-1}(f(x)) = x$, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Les fonctions tan et sa réciproque, Arctan, sont étudiées et tracées dans le cours.