DM "d'octobre" Inégalités, valeurs absolues, études de fonctions

Consigne : Aucun exercice n'est vraiment dur. S'assurer que la rédaction est parfaite, utiliser des quantificateurs et des mots ou symboles mettant en évidence vos raisonnements.

Exercice 1 ○○○ **Cours du lycée et valeur absolue** Assurer-vous de savoir déterminer les racines, les variations et le minimum (ou maximum) d'un polynôme de degré 2, et de savoir le tracer.

S'entrainer avec le polynôme $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$P(x) = x^2 + x - 2.$$

En particulier :

1. Trouver ses racines, si possible "à vue", et le factoriser "par ses racines".
2. Exploiter la forme canonique pour donner le minimum et les variations, sans calculer la dérivée. Que vaut $P(\mathbb{R})$?
3. La fonction P est-elle une bijection ? (On justifiera la réponse).
4. Tracer la courbe de P, puis tracer la courbe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto |P(x)|$.
5. Résoudre l'inéquation
$$f(x) \geqslant \frac{9}{4}$$

Exercice 2 ●●○ **La fonction** sh **avant l'heure**

Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle est bijective, et calculer la bijection réciproque. On pourra poser $X = e^x$ pour résoudre $y = g(x)$.

Exercice 3 ●●○ **On prépare le cours**

On souhaite étudier la fonction $\tan : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

1. Justifier que cette fonction est bien définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, étudier sa parité, et donner sa dérivée.
2. Montrer qu'elle définit une bijection, notée f, de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur un ensemble à déterminer (on n'essayera pas de "calculer" sa réciproque).
3. Déterminer $f^{-1}(1)$.
4. Calculer une expression pour $(f^{-1})'(x)$ (sans expression pour f^{-1} !). On aura remarqué que $f' = 1 + \tan^2$.