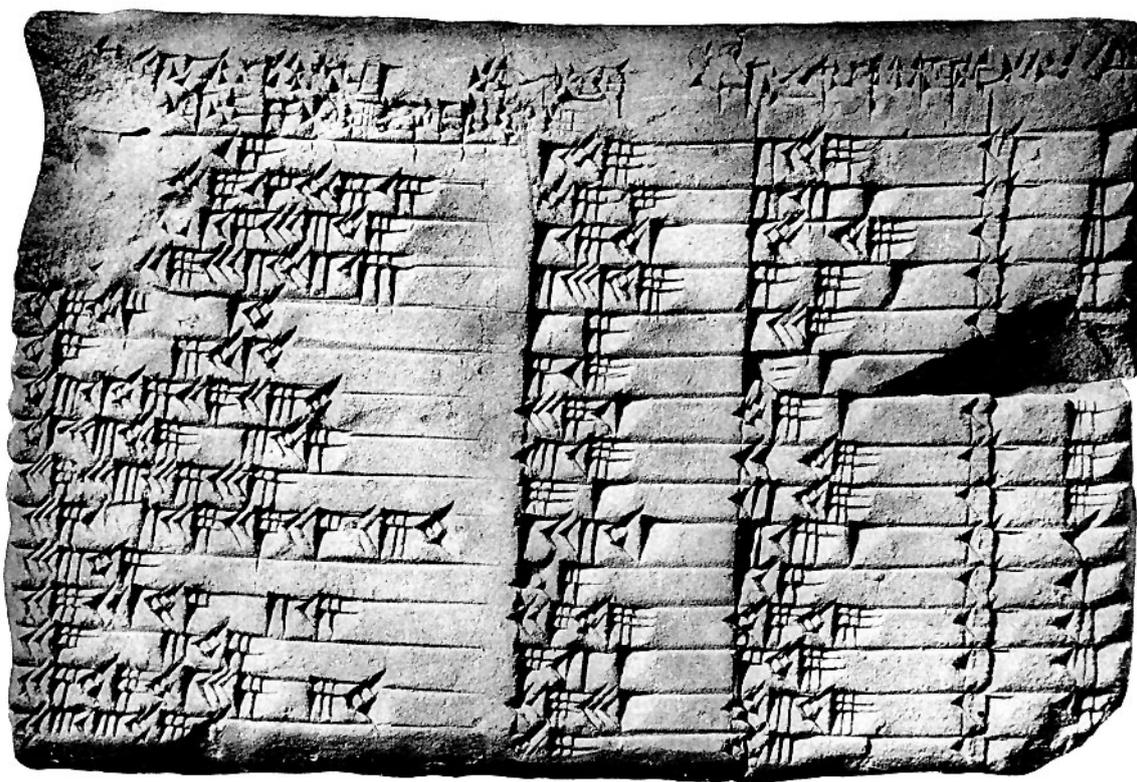


# Cahier de calcul

— pratique et entraînement —

Énoncés



*Plimpton 322*, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets  $(a, b, c)$  de nombres entiers vérifiant  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

*Version 11 — 20 juillet 2023*

# Sommaire

<input type="checkbox"/>	1. Fractions.....	1
<input type="checkbox"/>	2. Puissances.....	3
<input type="checkbox"/>	3. Calcul littéral.....	4
<input type="checkbox"/>	4. Racines carrées.....	6
<input type="checkbox"/>	5. Expressions algébriques.....	8
<input type="checkbox"/>	6. Équations du second degré.....	11
<input type="checkbox"/>	7. Exponentielle et logarithme.....	14
<input type="checkbox"/>	8. Trigonométrie.....	17
<input type="checkbox"/>	9. Dérivation.....	20
<input type="checkbox"/>	10. Tracé des fonctions usuelles.....	23
<input type="checkbox"/>	11. Primitives.....	28
<input type="checkbox"/>	12. Calcul d'intégrales.....	31
<input type="checkbox"/>	13. Intégration par parties.....	33
<input type="checkbox"/>	14. Changements de variable.....	35
<input type="checkbox"/>	15. Intégration des fractions rationnelles.....	37
<input type="checkbox"/>	16. Systèmes linéaires.....	40
<input type="checkbox"/>	17. Nombres complexes.....	42
<input type="checkbox"/>	18. Trigonométrie et nombres complexes.....	43
<input type="checkbox"/>	19. Sommes et produits.....	45
<input type="checkbox"/>	20. Coefficients binomiaux.....	48
<input type="checkbox"/>	21. Manipulation des fonctions usuelles.....	50
<input type="checkbox"/>	22. Suites numériques.....	53
<input type="checkbox"/>	23. Développements limités.....	55
<input type="checkbox"/>	24. Polynômes.....	57
<input type="checkbox"/>	25. Décomposition en éléments simples.....	59
<input type="checkbox"/>	26. Calcul matriciel.....	62
<input type="checkbox"/>	27. Algèbre linéaire.....	66
<input type="checkbox"/>	28. Équations différentielles.....	69
<input type="checkbox"/>	29. Séries numériques.....	71
<input type="checkbox"/>	30. Déterminants.....	73
<input type="checkbox"/>	31. Fonctions de deux variables.....	75



# Présentation et mode d'emploi

## Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

## À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études post-Bac.

## Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant de voir d'un seul coup d'œil les différentes fiches et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès la fin de la terminale puis durant le début de la première année, centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calcul.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés sont dans un second cahier dédié, diffusé selon le choix de votre professeur.

Chaque fiche de calcul est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (🕒🕒🕒), deux (🕒🕒🕒), trois (🕒🕒🕒🕒) ou quatre (🕒🕒🕒🕒) horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

## Comment l'utiliser ?

### Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Il peut être utilisé entre la terminale et la sup comme cahier d'été pour les fiches portant sur les acquis du secondaire, il vous permettra de renforcer des points mal maîtrisés avant votre entrée dans le supérieur.

Il sera ensuite utilisé tout au long de l'année : choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

### Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

### Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

## La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

## Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à contacter votre professeur de CPGE.

## Fractions

### Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

## Mettre au même dénominateur, non négociable

### Calcul 1.1 — Simplification de fractions.



a)  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$  .....

c) (Résistance équivalente)  $\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

b)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  .....

d)  $x + \frac{1}{x^2 + 1}$  .....

## Calculs dans l'ensemble des rationnels

### Calcul 1.2 — Simplification de fractions.



Simplifier les fractions suivantes (la lettre  $k$  désigne un entier naturel non nul).

a)  $\frac{32}{40}$  .....

c)  $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$  .....

b)  $8^3 \times \frac{1}{4^2}$  .....

d)  $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$  .....

### Calcul 1.3 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a)  $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$  .....

c)  $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$  .....

b)  $\frac{2}{3} - 0,2$  .....

d)  $-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right)$  .....

### Calcul 1.4



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a)  $(2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)$  .....

b)  $\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{21}{24}$  .....

c)  $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$  .....

d)  $\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$  .....

### Calcul 1.5 — Un petit calcul.



Écrire  $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$  sous forme d'une fraction irréductible. ....

### Calcul 1.6 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a)  $\frac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)} \cdots$        c)  $\frac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235} \cdots$

b)  $\frac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2} \cdots$        d)  $\frac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001} \cdots$

**Calcul 1.7 — Les fractions et le calcul littéral.** ⓁⓁⓁⓁ

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a)  $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  .....

b)  $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$  pour  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ , distincts deux à deux. ....

c)  $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ . ....

**Calcul 1.8 — Le quotient de deux sommes de Gauss.** ⓁⓁⓁⓁ

Simplifier  $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en utilisant la formule  $1 + 2 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ . ....

**Calcul 1.9 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.** ⓁⓁⓁⓁ

Soit  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Écrire les fractions suivantes sous la forme  $a + \frac{b}{X}$  avec  $a$  et  $b$  entiers et  $X \in \mathbb{R}$ .

a)  $\frac{29}{6} \cdots$        b)  $\frac{k}{k-1} \cdots$        c)  $\frac{3x-1}{x-2} \cdots$

**Calcul 1.10 — Un produit de fractions.** ⓁⓁⓁⓁ

Soit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . On donne  $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$  et  $B = (1+t^2)(1+t)^2$ .

Simplifier  $AB$  autant que possible. ....

## Comparaison

**Calcul 1.11 — Règles de comparaison.** ⓁⓁⓁⓁ

Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

a)  $\frac{3}{5} \cdots \frac{5}{9} \cdots$        b)  $\frac{12}{11} \cdots \frac{10}{12} \cdots$        c)  $\frac{125}{25} \cdots \frac{105}{21} \cdots$

**Calcul 1.12 — Produit en croix.** ⓁⓁⓁⓁ

Les nombres  $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$  et  $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$  sont-ils égaux ? Oui ou non ? .....

**Calcul 1.13 — Produit en croix.** ⓁⓁⓁⓁ

On pose  $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$  et  $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$  : a-t-on  $A > B$ ,  $A = B$  ou  $A < B$  ? .....

## Puissances

### Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

### Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a)  $10^5 \cdot 10^3 \dots\dots\dots$        c)  $\frac{10^5}{10^3} \dots\dots\dots$        e)  $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}} \dots\dots$

b)  $(10^5)^3 \dots\dots\dots$        d)  $\frac{10^{-5}}{10^{-3}} \dots\dots\dots$        f)  $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}} \dots\dots$

### Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $a^n$  avec  $a$  et  $n$  deux entiers relatifs.

a)  $3^4 \cdot 5^4 \dots\dots\dots$        c)  $\frac{2^5}{2^{-2}} \dots\dots\dots$        e)  $\frac{6^5}{2^5} \dots\dots\dots$

b)  $(5^3)^{-2} \dots\dots\dots$        d)  $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5} \dots\dots$        f)  $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}} \dots\dots\dots$

### Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $2^n \cdot 3^p$ , où  $n$  et  $p$  sont deux entiers relatifs.

a)  $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}} \dots\dots\dots$        c)  $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} \dots\dots\dots$

b)  $2^{21} + 2^{22} \dots\dots\dots$        d)  $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}} \dots\dots\dots$

### Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a)  $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}} \dots\dots\dots$        c)  $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}} \dots\dots\dots$

b)  $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4} \dots\dots\dots$        d)  $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6} \dots\dots\dots$

### Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel  $x$ .

a)  $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} \dots\dots\dots$        c)  $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x} \dots\dots\dots$

b)  $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} \dots\dots\dots$        d)  $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x} \dots\dots\dots$

## Calcul littéral

### Prérequis

Les identités remarquables.

## Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable  $x$  représente un nombre réel (ou complexe).

### Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de  $x$ .

a)  $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3 \dots\dots\dots$

d)  $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1) \dots$

b)  $(x-1)^3(x^2+x+1) \dots\dots\dots$

e)  $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1) \dots$

c)  $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1) \dots$

f)  $(x^2+x+1)(x^2-x+1) \dots\dots\dots$

### Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de  $x$ .

a)  $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2) \dots\dots\dots$

b)  $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1) \dots\dots\dots$

c)  $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2 \dots\dots\dots$

d)  $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1) \dots\dots\dots$

e)  $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(1 - \sqrt{2}x + x^2) \dots\dots\dots$

f)  $(x^2 + x + 1)^2 \dots\dots\dots$

## Factoriser

### Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle  $x$  suivantes.

a)  $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49 \dots\dots\dots$

b)  $25 - (10x+3)^2 \dots\dots\dots$

c)  $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64 \dots\dots\dots$

d)  $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64 \dots\dots\dots$

**Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.**



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de  $ax^2 + bx + c$  est  $a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$  (où  $a \neq 0$ ).

- |                         |                      |                           |                      |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 2x + 1$ ..... | <input type="text"/> | d) $3x^2 + 7x + 1$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 4x + 4$ ..... | <input type="text"/> | e) $2x^2 + 3x - 28$ ..... | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 3x + 2$ ..... | <input type="text"/> | f) $-5x^2 + 6x - 1$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.**



Factoriser sur  $\mathbb{R}$  les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- |                                      |                      |  |                      |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2$ .....           | <input type="text"/> | d) $xy - x - y + 1$ .....                  | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ ..... | <input type="text"/> | e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$ ..    | <input type="text"/> |
| c) $xy + x + y + 1$ .....            | <input type="text"/> | f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$ .. | <input type="text"/> |

**Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.**



Factoriser sur  $\mathbb{R}$  les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- |   |                      |
|---|----------------------|
| a) $x^4 - 1$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$ .....  | <input type="text"/> |
| c) $x^4 + x^2 + 1$ .....  | <input type="text"/> |
| d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ .....  | <input type="text"/> |
| e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$ .. | <input type="text"/> |

## Racines carrées

### Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

## Premiers calculs

### Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles  $\sqrt{\cdot}$  qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a)  $\sqrt{(-5)^2}$  .....

d)  $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$  .....

b)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$  .....

e)  $\sqrt{(3 - \pi)^2}$  .....

c)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$  .....

f)  $\sqrt{(3 - a)^2}$  .....

### Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a)  $(2\sqrt{5})^2$  .....

e)  $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$  .....

b)  $(2 + \sqrt{5})^2$  .....

f)  $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$  .....

c)  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$  .....

g)  $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$  .....

d)  $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$  .....

h)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$  .....

## Avec la méthode de la quantité conjuguée

### Calcul 4.3



Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$  .....

e)  $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$  .....

b)  $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$  .....

f)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$  .....

c)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$  .....

g)  $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$  .....

d)  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$  .....

h)  $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$  .....

**Calcul 4.4**

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{\phantom{0000}}$$

**Calculs variés****Calcul 4.5 — Avec une variable.**On considère la fonction  $f$  qui à  $x > 1$  associe  $f(x) = \sqrt{x-1}$ .Pour tout  $x > 1$ , calculer et simplifier les expressions suivantes.

- |  |                      |                                |                      |
|--|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ .....               | <input type="text"/> | d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ ..... | <input type="text"/> | e) $f(x) + 4f''(x)$ .....      | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{x+2f(x)}$ .....                      | <input type="text"/> | f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 4.6 — Mettre au carré.**

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

- |  |                      |  |                      |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ ..... | <input type="text"/> | b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ..... | <input type="text"/> |
|--|----------------------|--|----------------------|

**Calcul 4.7 — Méli-mélo.**

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

- |   |                      |   |                      |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ .....        | <input type="text"/> | d) $3e^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ .....                       | <input type="text"/> |
| b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ .....                   | <input type="text"/> | e) $2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ .....                 | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ ..... | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{2}\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 4.8**On note  $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ . Simplifier  $A$ On commencera par exprimer  $A^3$  en fonction de  $A$ . .....

## Expressions algébriques

### Prérequis

Identités remarquables.

## Les bases incontournables

### Calcul 5.1 — Identités remarquables.



a) Factoriser  $x^4 + 2x^2 + 1$ .

d) Développer  $(a - b)^3$ .

b) Factoriser  $4x^2 - 1$ . ...

e) Factoriser  $x^3 - 1$  dans  $\mathbb{R}$ .

c) Développer  $(a + b)^3$ .

f) Factoriser  $a^3 - b^3$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Calcul 5.2 — Souvenirs du collège (et du lycée).



Résoudre les équations suivantes, de tête.

a)  $2x + 1 = -x$  .....

d)  $x^2 = 1$ . .....

b)  $-3x + 3 = -6$  .....

e)  $\ln x = -1$ . .....

c)  $x^2 + x = 0$ . .....

f)  $e^x = \frac{1}{2}$ . .....

## Équations polynomiales

### Calcul 5.3 — Cubique.



Soit  $a$  un nombre réel tel que  $a^3 - a^2 + 1 = 0$ .

Exprimer les quantités suivantes sous la forme  $xa^2 + ya + z$  où  $x, y, z$  sont trois nombres rationnels.

a)  $(a + 2)^3$  .....

c)  $a^{12}$  .....

b)  $a^5 - a^6$  .....

d)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$  .....

### Calcul 5.4 — Introduction aux nombres complexes.



Soit  $i$  un nombre tel que  $i^2 = -1$ .

Exprimer les quantités suivantes sous la forme  $x + iy$  où  $x, y$  sont deux réels.

a)  $(3 + i)^2$  .....

c)  $(3 - i)^3$  .....

b)  $(3 - i)^2$  .....

d)  $(3 - 2i)^3$  .....

### Calcul 5.5



Même exercice.

- a)  $(4 - 5i)(6 + 3i) \dots\dots\dots$        c)  $(-4 + i\sqrt{5})^3 \dots\dots\dots$
- b)  $(2 + 3i)^3(2 - 3i)^3 \dots\dots\dots$        d)  $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 \dots\dots\dots$

**Calcul 5.6 — Puissance cinquième.**



Soit  $a$  un nombre distinct de 1 tel que  $a^5 = 1$ . Calculer les nombres suivants :

- a)  $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1 \dots\dots\dots$
- b)  $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123} \dots\dots\dots$
- c)  $\prod_{k=0}^{1234} a^k \dots\dots\dots$
- d)  $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \dots\dots\dots$
- e)  $\sum_{k=1}^{99} a^k \dots\dots\dots$
- f)  $\prod_{k=0}^4 (2 - a^k) \dots\dots\dots$

## Expressions symétriques

**Calcul 5.7 — Inverse.**



Soit  $x$  un réel non nul. On pose  $a = x - \frac{1}{x}$ . Exprimer les quantités suivantes en fonction de  $a$  uniquement.

- a)  $x^2 + \frac{1}{x^2} \dots\dots$        b)  $x^3 - \frac{1}{x^3} \dots\dots$        c)  $x^4 + \frac{1}{x^4} \dots\dots$

**Calcul 5.8 — Trois variables.**



Soient  $x, y, z$  trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad \text{et} \quad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de  $a, b, c$  uniquement.

- a)  $x^2 + y^2 + z^2 \dots\dots\dots$
- b)  $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) \dots\dots\dots$
- c)  $x^3 + y^3 + z^3 \dots\dots\dots$
- d)  $(x + y)(y + z)(z + x) \dots\dots\dots$
- e)  $x^2yz + y^2zx + z^2xy \dots\dots\dots$
- f)  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \dots\dots\dots$

**Calcul 5.9**



Même exercice.

a)  $x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y)$  .....

b)  $x^4 + y^4 + z^4$  .....

c)  $\frac{x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y}{(y-z)(y-x)} + \frac{z}{(z-x)(z-y)}$  .....

d)  $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$  .....

e)  $\frac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^3}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^3}{(z-x)(z-y)}$  .....

# Équations du second degré

## Prérequis

Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

## Recherche de racines

### Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.



Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

a)  $x^2 - 6x + 9 = 0$  .....

f)  $2x^2 + 3x = 0$  .....

b)  $9x^2 + 6x + 1 = 0$  .....

g)  $2x^2 + 3 = 0$  .....

c)  $x^2 + 4x - 12 = 0$  .....

h)  $x^2 + 4x - 5 = 0$  .....

d)  $x^2 - 5x + 6 = 0$  .....

i)  $3x^2 - 11x + 8 = 0$  .....

e)  $x^2 - 5x = 0$  .....

j)  $5x^2 + 24x + 19 = 0$  .....

### Calcul 6.2 — Somme et produit.



Résoudre mentalement les équations suivantes.

a)  $x^2 - 13x + 42 = 0$  .....

d)  $x^2 - 8x - 33 = 0$  .....

b)  $x^2 + 8x + 15 = 0$  .....

e)  $x^2 - (a + b)x + ab = 0$  .....

c)  $x^2 + 18x + 77 = 0$  .....

f)  $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$  .....

### Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.



Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a)  $3x^2 - 14x + 8 = 0$  sachant que  $x = 4$  est racine .....

b)  $7x^2 + 23x + 6 = 0$  sachant que  $x = -3$  est racine .....

c)  $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$  sachant que  $x = -2$  est racine .....

d)  $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$  sachant que  $x = m$  est racine .....

**Calcul 6.4 — Racine évidente.**



Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

- a)  $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$  .....
- b)  $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$  .....
- c)  $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b)$  .....
- d)  $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0$  .....
- e)  $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$  .....
- f)  $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  .....

**Recherche d'équations**

**Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.**



En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

- a) 9 et 13 .....
- b) -11 et 17 .....
- c)  $2 + \sqrt{3}$  et  $2 - \sqrt{3}$  .....
- d)  $m + \sqrt{m^2 - 3}$  et  $m - \sqrt{m^2 - 3}$  .....
- e)  $m + 3$  et  $\frac{2m - 5}{2}$  .....
- f)  $\frac{m + 1}{m}$  et  $\frac{m - 2}{m}$  .....

**Calcul 6.6 — Avec le discriminant.**



Déterminer la valeur à donner à  $m$  pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

- a)  $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$  .....
- b)  $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 = 0$  .....
- c)  $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$  .....

## Factorisations et signe

### Calcul 6.7 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres  $a$  et  $b$  pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout  $x$ .

a)  $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$  .....

b)  $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$  .....

c)  $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$  .....

d)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$  .....

e)  $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$  .....

### Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a)  $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$  .....

b)  $-x^2 + 2x + 15$  .....

c)  $(x + 1)(3x - 2)$  .....

d)  $\frac{x - 4}{2x + 1}$  .....



# Exponentielles

## Calcul 7.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a)  $e^{3 \ln 2}$  .....

d)  $e^{-2 \ln 3}$  .....

b)  $\ln(\sqrt{e})$  .....

e)  $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$  .....

c)  $\ln(e^{\frac{1}{3}})$  .....

f)  $e^{\ln 3 - \ln 2}$  .....

## Calcul 7.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a)  $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$  .....

d)  $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$  .....

b)  $e^{-\ln \ln 2}$  .....

e)  $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$  .....

c)  $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$  .....

f)  $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$  .....

# Études de fonctions

## Calcul 7.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

a)  $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021+x}{2021-x}$  .....

b)  $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  .....

c)  $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$  .....

d)  $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  .....

## Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.



Soit  $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. ....

b) Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  on a  $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ . ....

c) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . ....

d) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . ....

### Calcul 7.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout  $x \in \mathbb{R}$  pour lequel elles sont définies.

- a)  $f(2e^x - 1)$  .....       d)  $xf'(x) - 1$  .....
- b)  $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$  .....       e)  $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$  .....
- c)  $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$  .....

## Équations, inéquations

### Calcul 7.10



Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue  $x$ ).

- a)  $e^{3x-5} \geq 12$  .....
- b)  $1 \leq e^{-x^2+x}$  .....
- c)  $e^{1+\ln x} \geq 2$  .....
- d)  $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$  .....
- e)  $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$  .....
- f)  $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$  .....

## Trigonométrie

### Prérequis

Relation  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ . Symétrie et périodicité de sin et cos.  
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche,  $x$  désigne une quantité réelle.

## Connaître ses formules d'addition et de duplication

### Calcul 8.1

🔍🔍🔍🔍 Développer les quantités suivantes, où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.

- a)  $\cos(a + b)$  (et, si vous avez vu les complexes, retrouver en écrivant  $e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$ ) .....
- b)  $\cos(a - b)$  (et : vérifier la cohérence avec le calcul précédent). .....
- c)  $\sin(a + b)$  (et : retrouver en écrivant  $e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$ ) .....
- d)  $\sin(a - b)$  (et : vérifier la cohérence avec le calcul précédent) .....
- e)  $\cos(2x)$  (trois formules, et : vérifier en écrivant  $\cos(2x) = \cos(x + x)$ ). .....
- f)  $\sin(2x)$  (et : vérifier en écrivant  $\sin(2x) = \sin(x + x)$ ). .....

## Valeurs remarquables de cosinus et sinus

### Calcul 8.2

🔍🔍🔍🔍

Simplifier :

- a)  $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$  .....
- b)  $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}$  .....
- c)  $\tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6}$  .....
- d)  $\cos^2 \frac{4\pi}{3} - \sin^2 \frac{4\pi}{3}$  .....

## Propriétés remarquables de cosinus et sinus

### Calcul 8.3

🔍🔍🔍🔍

Simplifier (éviter les formules d'addition)

- a)  $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  .....
- b)  $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  .....
- c)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  .....
- d)  $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$  .....

## Formules d'addition

### Calcul 8.4

🔍🔍🔍🔍

Calculer les quantités suivantes.

a)  $\cos \frac{5\pi}{12}$  (on a  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$ ) .....

c)  $\sin \frac{\pi}{12}$  .....

b)  $\cos \frac{\pi}{12}$  .....

d)  $\tan \frac{\pi}{12}$  .....

**Calcul 8.5**



a) Simplifier :  $\sin(4x) \cos(5x) - \sin(5x) \cos(4x)$  .....

b) Simplifier :  $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$  (pour  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ) .....

c) Simplifier :  $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$  .....

d) Expliciter  $\cos(3x)$  en fonction de  $\cos x$  .....

e) Expliciter  $\tan(a+b)$  en fonction de  $\tan a$  et  $\tan b$ , lorsque toutes ces quantités sont bien définies.

## Formules de duplication

### Calcul 8.6



En remarquant qu'on a  $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$ , calculer :

a)  $\cos \frac{\pi}{8}$  .....

b)  $\sin \frac{\pi}{8}$  .....

### Calcul 8.7



a) Simplifier :  $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$  (avec  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ) .....

b) Simplifier :  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$  (pour  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ) .....

c) Expliciter  $\cos(4x)$  en fonction de  $\cos x$  .....

## Équations trigonométriques

### Calcul 8.8



Résoudre dans  $[0, 2\pi]$ , dans  $[-\pi, \pi]$ , puis dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $\cos x = \frac{1}{2}$  .....

f)  $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$  .....

b)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  .....

g)  $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  .....

c)  $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$  .....

h)  $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$  .....

d)  $\tan x = -1$  .....

i)  $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$  .....

e)  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$  .....

j)  $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$  .....

## Inéquations trigonométriques

### Calcul 8.9



Résoudre dans  $[0, 2\pi]$ , puis dans  $[-\pi, \pi]$ , les inéquations suivantes :

a)  $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$  .....

e)  $\tan x \geq 1$  .....

b)  $\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$  .....

f)  $|\tan x| \geq 1$  .....

c)  $\sin x \leq \frac{1}{2}$  .....

g)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$  .....

d)  $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$  .....

h)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$  .....

## Dérivation

### Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

## Application des formules usuelles

### Calcul 9.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$ . .....

b)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$ . .....

d)  $x \in ]2, +\infty[$  et  $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$  .....

### Calcul 9.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^2 - 5x)^5$ . .....

b)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$ . .....

d)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$ . .....

### Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ . .....

b)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \ln(\ln(x))$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$ . .....

d)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$ . .....

**Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — bis.**



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ . .....

b)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$ . .....

c)  $x \in ]0, \pi[$  et  $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$ . .....

d)  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ . .....

**Calcul 9.5 — Avec des quotients.**



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 \sin(x) + 3}$ . .....

b)  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2}$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$ . .....

d)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$ . .....

## Opérations et fonctions composées

**Calcul 9.6**



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . .....

b)  $x \in ]-3, 3[$  et  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ . .....

c)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}\right)$ . .....

d)  $x \in ]0, \pi[$  et  $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ . .....

# Dériver pour étudier une fonction

## Calcul 9.7



Calculer  $f'(x)$  et écrire le résultat sous forme factorisée.

a)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$  et  $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$ . .....

b)  $x \in ]-1, +\infty[$  et  $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$  .....

c)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$ . .....

d)  $x \in ]-1, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$ . .....

e)  $x \in ]0, e[ \cup ]e, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$ . .....

## Tracé des fonctions usuelles

**Prérequis**

Ce chapitre n'est pas exactement une fiche de calculs, mais les manipulations mentales qui permettent de tracer une fonction n'en sont pas éloignées. Les prérequis sont : fonctions usuelles, transformation du graphe, manipulation des trinômes (mise sous forme canonique...).

On se donne un repère orthonormée  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. C'est dans ce repère qu'on va demander de tracer des fonctions.

Par tracer une fonction, on entend : esquisser l'allure de sa courbe représentative, en indiquant son domaine de définition, et donner des éléments caractéristiques (valeurs particulières, limites et asymptotes, tangentes à la courbe en certaines valeurs).

### Transformations de graphe

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, on note  $C_f$  sa courbe représentative (son graphe).

**Calcul 10.1 — Règles générales.**



Donner la transformation géométrique qui permet de déduire le graphe de la nouvelle fonction  $g$ .

Par exemple : le graphe de la fonction  $g : x \mapsto f(x) + b$  se déduit de  $C_f$  par **une translation de vecteur  $b\vec{j}$** .

a) Le graphe de la fonction  $g : x \mapsto f(x - a)$  se déduit de  $C_f$  par ....

b) Le graphe de la fonction  $g : x \mapsto -f(x)$  se déduit de  $C_f$  par .....

c) Le graphe de la fonction  $g : x \mapsto f(-x)$  se déduit de  $C_f$  par .....

**Calcul 10.2 — Mise en pratique sur des fonctions usuelles.**



Tracer les graphes des fonctions données.

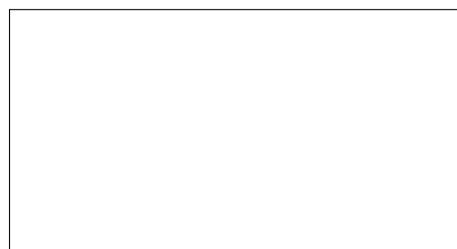
a)  $g : x \mapsto e^x - 1$ . .....

b)  $g : x \mapsto \ln(x + 1)$ . .....

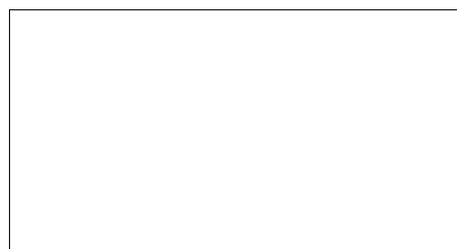
c)  $g : x \mapsto -\cos(x)$ . .....



d)  $g : x \mapsto -\sqrt{x-5}$ . .....



e)  $g : x \mapsto \sin(x + \pi) + 1$ . .....



f)  $g : x \mapsto (x - 1)^3$ . .....



# Droites et paraboles

## Calcul 10.3 — Equations de droites.



Tracer les graphes des droites suivantes, données par leur équation. Préciser un vecteur directeur.

a)  $y = 2x - 1$ . .....

b)  $y = -3x + 1$ . .....

c)  $2x + 5y + 1 = 0$ . .....

d)  $y + x = 0$ . .....

## Calcul 10.4 — Paraboles.



Tracer les graphes des polynômes de degré deux (trinômes) suivants. On pourra

- ou bien exploiter les racines du trinôme (l'extremum de la parabole est atteint entre les deux racines!).
- ou bien exploiter la forme canonique pour déduire le graphe de la parabole  $x \mapsto x^2$ .

a)  $g : x \mapsto x(x + 1)$  (exploiter les racines). .....

b)  $g : x \mapsto x^2 + x + 1$  (exploiter la forme canonique). .....

c)  $g : x \mapsto x^2 - 3x + 2$  (au choix). .....



d)  $g : x \mapsto -x^2 + 2x - 1$ . .....



# Nouvelles fonctions

## Calcul 10.5



Même exercice que ci-dessus.

a)  $g : x \mapsto |\tan x|$ . .....

b)  $g : x \mapsto \arccos(x - 1)$ . .....

c)  $g : x \mapsto -\arcsin x$  .....

d)  $g : x \mapsto \arctan x$  (incontournable). .....

e)  $g : x \mapsto \cosh(x + 2)$ . .....

f)  $g : x \mapsto \sinh(x)$ . .....

## Primitives

### Prérequis

Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.  
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

### Calculs directs

#### Calcul 11.1



Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a)  $\frac{1}{t+1}$  .....

c)  $\frac{3}{(t+2)^3}$  .....

b)  $\frac{3}{(t+2)^2}$  .....

d)  $\sin(4t)$  .....

#### Calcul 11.2



Même exercice.

a)  $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$  .....

c)  $\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$  .....

b)  $e^{2t+1}$  .....

d)  $\frac{1}{1+9t^2}$  .....

### Utilisation des formulaires

#### Calcul 11.3 — Dérivée d'une fonction composée.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a)  $\frac{2t^2}{1+t^3}$  .....

d)  $\frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$  .....

b)  $t\sqrt{1+2t^2}$  .....

e)  $\frac{t}{1+3t^2}$  .....

c)  $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$  .....

f)  $\frac{12t}{(1+3t^2)^3}$  .....

#### Calcul 11.4 — Dérivée d'une fonction composée – bis.



Même exercice.

a)  $\frac{\ln^3 t}{t}$  .....

d)  $\frac{1}{t^2\sqrt{t}}$  .....

b)  $\frac{1}{t\sqrt{\ln t}}$  .....

e)  $\frac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$  .....

c)  $\frac{8e^{2t}}{(3 - e^{2t})^3}$  .....

f)  $\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$  .....

**Calcul 11.5 — Trigonométrie.**



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

- |  |  |  |
|--|--|--|
| a) $\cos^2 t \sin t$ ..... <input type="text"/>                | g) $\tan^2 t$ ..... <input type="text"/>                         | l) $\frac{\cos t}{(1 - \sin t)^3}$ ..... <input type="text"/>            |
| b) $\cos(t)e^{\sin t}$ ..... <input type="text"/>              | h) $\tan^3 t$ ..... <input type="text"/>                         | m) $\frac{1}{1 + 4t^2}$ ..... <input type="text"/>                       |
| c) $\tan t$ ..... <input type="text"/>                         | i) $\frac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ ..... <input type="text"/>        | n) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}}$ ..... <input type="text"/>                   |
| d) $\frac{\cos t}{1 - \sin t}$ ..... <input type="text"/>      | j) $\frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ ..... <input type="text"/> | o) $\frac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1 - t^2}}$ ..... <input type="text"/>  |
| e) $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ ..... <input type="text"/> | k) $\frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t}$ ..... <input type="text"/>    | p) $\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}\text{Arcsin}(t)}$ ..... <input type="text"/> |
| f) $\frac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ ..... <input type="text"/>      |  |  |

**Calcul 11.6 — Trigonométrie – bis.**



Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| a) $\cos^2 t$ ..... <input type="text"/>         | d) $\frac{\sin(2t)}{1 + \sin^2 t}$ ..... <input type="text"/> | f) $\frac{1}{\sin^2(t) \cos^2(t)}$ ..... <input type="text"/> |
| b) $\cos(t) \sin(3t)$ ..... <input type="text"/> | e) $\frac{1}{\sin t \cos t}$ ..... <input type="text"/>       | g) $\frac{1}{\sin(4t)}$ ..... <input type="text"/>            |
| c) $\sin^3 t$ ..... <input type="text"/>         |   |   |

**Calcul 11.7 — Fractions rationnelles.**



Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) $\frac{t^2 + t + 1}{t^2}$ ..... <input type="text"/> | d) $\frac{t^3 + 1}{t + 1}$ ..... <input type="text"/> | g) $\frac{t - 1}{t^2 + 1}$ ..... <input type="text"/> |
| b) $\frac{t^2 + 1}{t^3}$ ..... <input type="text"/>     | e) $\frac{t - 1}{t + 1}$ ..... <input type="text"/>   | h) $\frac{t}{(t + 1)^2}$ ..... <input type="text"/>   |
| c) $\frac{1 - t^6}{1 - t^2}$ ..... <input type="text"/> | f) $\frac{t^3}{t + 1}$ ..... <input type="text"/>     |   |

## Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

**Calcul 11.8**



Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

- |   |  |
|---|--|
| a) $t^2 - 2t + 5$ ..... <input type="text"/>                        | e) $e^{2t} + e^{-3t}$ ..... <input type="text"/>       |
| b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ ..... <input type="text"/>         | f) $e^{3t-2}$ ..... <input type="text"/>               |
| c) $\sqrt{t} - \frac{1}{t^3}$ ..... <input type="text"/>            | g) $\frac{t^2}{t^3 - 1}$ ..... <input type="text"/>    |
| d) $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t\sqrt{t}}$ ..... <input type="text"/> | h) $\frac{3t - 1}{t^2 + 1}$ ..... <input type="text"/> |

i)  $\sin(t) \cos^2(t) \dots$

j)  $\sinh(t) \cosh(t) \dots$

k)  $\frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t} \dots$

l)  $\frac{e^t}{2 + e^t} \dots$

m)  $\frac{\sin t}{2 + 3 \cos t} \dots$

n)  $\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \dots$

o)  $\frac{\sin 2t}{1 + \cos^2 t} \dots$

p)  $te^{-t^2} \dots$

q)  $\frac{1 - \ln t}{t} \dots$

r)  $\frac{1}{t \ln t} \dots$

s)  $\frac{\sin(\ln t)}{t} \dots$

t)  $\frac{e^t}{1 + e^{2t}} \dots$

**Calcul 11.9 — *Bis repetita.***



Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

## Calcul d'intégrales

### Prérequis

Primitives usuelles, composées simples.

### Intégrales et aires algébriques

On rappelle que  $\int_a^b f(x) dx$  est l'aire algébrique entre la courbe représentative de  $f$  et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

#### Calcul 12.1



Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a)  $\int_{-2}^3 x^2 + e^x dx$  .       b)  $\int_5^{-3} |\sin 7x| dx$        c)  $\int_0^{-1} \sin x dx$  ...

#### Calcul 12.2



En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^3 7 dx$  .....       c)  $\int_0^7 3x dx$  .....       e)  $\int_{-2}^2 \sin x dx$  ....   
 b)  $\int_7^{-3} -5 dx$  .....       d)  $\int_2^8 1 - 2x dx$  ..       f)  $\int_{-2}^1 |x| dx$  .....

### Calcul d'intégrales

On rappelle que si  $F$  est une primitive de  $f$  alors  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , que l'on note  $\left[ F(x) \right]_a^b$ .

#### Calcul 12.3 — Polynômes.



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{-1}^3 2 dx$  .....       d)  $\int_{-1}^1 3x^5 - 5x^3 dx$  .....   
 b)  $\int_1^3 2x - 5 dx$  .....       e)  $\int_0^1 x^5 - x^4 dx$  .....   
 c)  $\int_{-2}^0 x^2 + x + 1 dx$  .....       f)  $\int_1^{-1} x^{100} dx$  .....

#### Calcul 12.4 — Fonctions usuelles.



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx$  ...       c)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$  .....       e)  $\int_{-3}^2 e^x dx$  .....   
 b)  $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$  ...       d)  $\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  ...       f)  $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$  .....

**Calcul 12.5 — De la forme  $f(ax + b)$ .**



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{-1}^2 (2x + 1)^3 dx$  .....

d)  $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx$  .....

b)  $\int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} dx$  .....

e)  $\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$  .....

c)  $\int_0^1 \frac{dx}{\pi x + 2}$  .....

f)  $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx$  .....

**Calcul 12.6 — Fonctions composées.**



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx$  .....

d)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 dx$  .....

b)  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x^2 + 1) dx$  .....

e)  $\int_0^1 x e^{x^2-1} dx$  .....

c)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$  .....

f)  $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$  .....

**Calcul 12.7 — Divers.**



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$  .....

d)  $\int_1^e \frac{3x - 2 \ln x}{x} dx$  .....

b)  $\int_{-2}^3 |x+1| dx$  .....

e)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(x) dx$  .....

c)  $\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx$  .....

f)  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| dx$  .....

**Calcul 12.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.**



a)  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin x dx$  .....

d)  $\int_0^1 \operatorname{ch}(x) dx$  .....

b)  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  .....

e)  $\int_0^1 \sqrt{x} dx$  .....

c)  $\int_0^2 10^x dx$  .....

f)  $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} dx$  .....

## Intégration par parties

**Prérequis**

Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , si  $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$  et si  $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ , alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

### Intégrales

**Calcul 13.1**



Calculer :

- |  |  |
|--|--|
| <p>a) <math>\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>b) <math>\int_0^1 (2t + 3)\text{sh}(2t) dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>c) <math>\int_0^2 te^{\frac{t}{2}} dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>d) <math>\int_1^{\ln 2} t2^t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>e) <math>\int_1^e \ln t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>f) <math>\int_1^2 t \ln t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>g) <math>\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>h) <math>\int_0^1 t \arctan t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>i) <math>\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>j) <math>\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>k) <math>\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t) dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>l) <math>\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |
|--|--|

### Primitives

**Calcul 13.2**



Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

- |   |  |
|---|--|
| <p>a) <math>x \mapsto (-x + 1)e^x</math> ..... <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>b) <math>x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}</math> ..... <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/></p> | <p>c) <math>x \mapsto \arctan(x)</math> ..... <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>d) <math>x \mapsto x\text{ch}(x)</math> ..... <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/></p> |
|---|--|

# Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

## Calcul 13.3 — Calcul d'intégrales.



a)  $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt \dots\dots\dots$

## Calcul 13.4 — Calcul de primitives.



Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a)  $x \mapsto \sin(x)\text{sh}(x) \dots\dots$

c)  $x \mapsto (x \ln x)^2 \dots\dots\dots$

b)  $x \mapsto \ln^2 x \dots\dots\dots$

d)  $x \mapsto e^{\arccos(x)} \dots\dots\dots$

## Changements de variable

### Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

## Changements de variable

### Calcul 14.1



Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

- a)  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$  avec  $t = \sin \theta$  .....
- b)  $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt$  avec  $u = \sqrt{t}$  .....
- c)  $\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt$  avec  $u = e^t$  .....
- d)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt$  avec  $u = \sin t$  .....
- e)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt$  avec  $u = \sin t$  .....
- f)  $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt$  avec  $u = \sqrt{t}$  .....

### Calcul 14.2



Même exercice.

- a)  $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$  avec  $u = \cos t$  .....
- b)  $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} dt$  avec  $u = e^t$  .....
- c)  $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}} dt$  avec  $u = \frac{t}{2} - 1$  .....
- d)  $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$  avec  $t = \tan u$  .....
- e)  $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt$  avec  $u = \frac{1}{t}$  .....
- f)  $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t + t \ln^2 t} dt$  avec  $u = \ln t$  .....

## Changements de variable et intégrations par parties

### Calcul 14.3



Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a)  $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$  avec  $u = \sqrt{t}$  .....

b)  $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}} dt$  avec  $u = \sqrt{t}$  .....

## Calculs de primitives par changement de variable

### Calcul 14.4



Déterminer une primitive de  $f$  en utilisant le changement de variable donné.

a)  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \mapsto \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$  avec  $u = \tan x$  .....

b)  $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 + \text{th}(x)}$  avec  $u = e^x$  .....

c)  $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$  avec  $u = \sqrt{e^x - 1}$  .....

d)  $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$  avec  $u = \sqrt[3]{x}$  .....

e)  $x > 1 \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$  avec  $u = \sqrt{x^2 - 1}$  .....

## Intégration des fractions rationnelles

### Prérequis

Fonctions ln et arctan. Division euclidienne entre polynômes.  
 Petites décompositions en éléments simples.  
 Forme canonique d'un trinôme du second degré.  
 Changements de variable affines dans les intégrales.

### Premier cas

#### Calcul 15.1



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^2 \frac{1}{t+1} dt$  .....

b)  $\int_1^2 \frac{1}{2t+1} dt$  .....

#### Calcul 15.2



Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} dt$  .....

b)  $\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a} dt$  .....

### Deuxième cas

#### Calcul 15.3



Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

a)  $\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t} dt$  .....

b)  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5} dt$  .....

### Troisième cas

Dans ce troisième cas, il s'agit de reconnaître une expression du type  $\frac{u'}{u}$ .

#### Calcul 15.4



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt$  .....

b)  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}} dt$  .....

#### Calcul 15.5



Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2 + \sqrt{2}t} dt$  .....

b)  $\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{t}{at^2+1} dt$  .....

## Quatrième cas

### Calcul 15.6 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.



a) Quels sont les deux zéros de  $t \mapsto t^2 - 3t + 2$ ? .....

b) Trouver deux réels  $A$  et  $B$  tels que

pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ , on ait  $\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$  .....

c) Calculer  $\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)} dt$  .....

### Calcul 15.7



Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a)  $\int_0^1 \frac{4}{t^2 - 4} dt$  .....

c)  $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt$  .....

b)  $\int_2^3 \frac{2}{t^2 - t} dt$  .....

d)  $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2 - 1} dt$  .....

### Calcul 15.8



Soit  $a \in ]0, 1[$ . Calculer  $\int_0^a \frac{1}{t^2 - a} dt$  .....

## Cinquième cas

### Calcul 15.9 — Une primitive à retenir.



Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ .

a) Calculer la dérivée de  $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$  .....

b) Donner une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{a^2 + x^2}$  .....

### Calcul 15.10



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$  .....

b)  $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 3} dt$  .....

### Calcul 15.11



Calculer  $\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2 + 2} dt$  .....

# Synthèse

## Calcul 15.12 — Mise sous forme canonique.



Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où  $x \in \mathbb{R}$ ).

a)  $x^2 + x + 1$  .....

c)  $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$  .....

b)  $2x^2 - 3x + 1$  .....

d)  $ax^2 + a^2x + a^3$  .....

## Calcul 15.13



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2} dt$  .....

c)  $\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt$  .....

b)  $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$  .....

d)  $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1} dt$  .....

## Calcul 15.14



Soit  $a > 1$ . Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{10}{3}} dt$  .....

b)  $\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a} dt$  .....

## Un calcul plus difficile

## Calcul 15.15



Calculer  $\int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt$  .....

## Systèmes linéaires

### Prérequis

Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

### Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

#### Calcul 16.1



Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$ .

a)  $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$  .....

c)  $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$  .....

b)  $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$  .....

d)  $\begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases}$  .....

#### Calcul 16.2 — Systèmes avec paramètre.



Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  en fonction des valeurs du paramètre  $a \in \mathbb{R}$ .

a)  $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$  .....

c)  $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$  .....

b)  $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$  .....

d)  $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$  .....

### Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

#### Calcul 16.3



Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ .

a)  $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$  .....

c)  $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$  .....

b)  $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$  .....

d)  $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$  .....

### Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

#### Calcul 16.4



Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ .

a)  $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$  .....

c)  $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$  .....

b)  $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$  .....

d)  $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$  .....

**Calcul 16.5**

On considère le système d'inconnues  $x, y, z \in \mathbb{R}$  et de paramètre  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de  $a$  proposées.

- a)  $a = 0$  .....       c)  $a = 3$  .....   
 b)  $a = -2$  .....       d)  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$ . .....

**Calcul 16.6**

On considère le système d'inconnues  $x, y, z \in \mathbb{R}$  et de paramètres  $(a, c) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} x - az = c \\ ax - y = c \\ ay - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de  $a$  et  $c$  proposées.

- a)  $a = 2, c = 7$  .....       c)  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  .....   
 b)  $a = 1, c = 2$  .....

**Calcul 16.7**

On propose le système d'inconnues  $x, y, z \in \mathbb{R}$  et de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de  $\lambda$  proposées.

- a)  $\lambda = 1$  .....       c)  $\lambda = 6$  .....   
 b)  $\lambda = 3$  .....

# Nombres complexes

## Prérequis

Forme algébrique et forme exponentielle.

## Pour s'échauffer

### Calcul 17.1 — Écriture algébrique.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

- |                             |                      |                                  |                      |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $(2 + 6i)(5 + i)$ .....  | <input type="text"/> | e) $(2 - 3i)^4$ .....            | <input type="text"/> |
| b) $(3 - i)(4 + i)$ .....   | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{3 - i}$ .....       | <input type="text"/> |
| c) $(4 - 3i)^2$ .....       | <input type="text"/> | g) $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$ ..... | <input type="text"/> |
| d) $(1 - 2i)(1 + 2i)$ ..... | <input type="text"/> | h) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .....   | <input type="text"/> |

### Calcul 17.2 — Forme exponentielle.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

- |                      |                      |  |                      |
|----------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) 12 .....          | <input type="text"/> | e) $-2e^{i\frac{3\pi}{5}}$ .....                   | <input type="text"/> |
| b) $-8$ .....        | <input type="text"/> | f) $5 - 5i$ .....                                  | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{3}i$ ..... | <input type="text"/> | g) $-5 + 5i\sqrt{3}$ .....                         | <input type="text"/> |
| d) $-2i$ .....       | <input type="text"/> | h) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ ..... | <input type="text"/> |

## Un calcul plus dur

### Calcul 17.3 — Une simplification.



On pose  $z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$ .

- |   |                      |
|---|----------------------|
| a) Calculer $ z $ .....                   | <input type="text"/> |
| b) Mettre $z$ sous forme algébrique ..... | <input type="text"/> |
| c) Calculer $z^{2021}$ .....              | <input type="text"/> |

## Trigonométrie et nombres complexes

### Prérequis

Nombres complexes, trigonométrie.

Dans toute cette fiche,  $x$  désigne une quantité réelle.

### Linéarisations

#### Calcul 18.1



Linéariser :

a)  $\cos^3(x)$  .....

d)  $\cos(3x) \sin^3(2x)$  ...

b)  $\cos(2x) \sin^2(x)$  ....

e)  $\cos^3(2x) \cos(3x)$  ..

c)  $\cos^2(2x) \sin^2(x)$  ...

f)  $\sin^2(4x) \sin(3x)$  ...

### Arc-moitié, arc-moyen

#### Calcul 18.2



Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme  $re^{i\theta}$ , avec  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ) :

a)  $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$  .....

e)  $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$  .....

b)  $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$  .....

f)  $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$  .....

c)  $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$  .....

g)  $\frac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$  .....

d)  $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$  .....

h)  $(1 + e^{i\frac{\pi}{6}})^{27}$  .....

#### Calcul 18.3



Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme  $re^{i\theta}$ , avec  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ) :

a)  $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$  .....

b)  $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$  .....

### Délinéarisations

#### Calcul 18.4



Exprimer en fonction des puissances de  $\cos(x)$  et de  $\sin(x)$  :

a)  $\cos(3x)$  .....

b)  $\sin(4x)$  .....

## Factorisations

### Calcul 18.5



Factoriser :

a)  $\cos(x) + \cos(3x) \dots\dots$

c)  $\cos(x) - \cos(3x) \dots\dots$

b)  $\sin(5x) - \sin(3x) \dots\dots$

d)  $\sin(3x) + \sin(5x) \dots\dots$

### Calcul 18.6



Factoriser :

a)  $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) \dots\dots\dots$

b)  $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) \dots\dots\dots$

c)  $\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \dots\dots\dots$

## Calculs d'intégrales

### Calcul 18.7



Calculer :

a)  $\int_0^\pi e^x \sin(x) dx \dots\dots\dots$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x) dx \dots\dots\dots$

## Sommets et produits

## Prérequis

Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.  
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

## Rappel

Si  $q$  est un nombre réel, si  $m, n \in \mathbb{N}^*$  et si  $m \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=m}^n k &= \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} & \bullet \sum_{k=1}^n k^3 &= \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \bullet \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \bullet \sum_{k=m}^n q^k &= \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans toute la suite,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

## Calculs de sommes simples

## Calcul 19.1



Calculer les sommes suivantes.

a)  $\sum_{k=1}^{n+2} n$  .....

c)  $\sum_{k=1}^n (3k+n-1)$  .....

b)  $\sum_{k=2}^{n+2} 7k$  .....

d)  $\sum_{k=2}^{n-1} \left( \frac{k-4}{3} \right)$  .....

## Calcul 19.2



Même exercice.

a)  $\sum_{k=1}^n k(k+1)$  .....

d)  $\sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k}$  .....

b)  $\sum_{k=0}^n (4k(k^2+2))$  .....

e)  $\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2)$  .....

c)  $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$  .....

f)  $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$  .....

## Calcul 19.3 — Produits.



Calculer les produits suivants, où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels non nuls tels que  $p \geq q$ .

a)  $\prod_{k=p}^q 2$  .....

c)  $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k} \times k$  .....

b)  $\prod_{k=1}^n 3^k$  .....

d)  $\prod_{k=-10}^{10} k$  .....

## Avec des changements d'indice

### Calcul 19.4



Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

- a)  $\sum_{k=1}^n n+1-k$  avec  $j = n+1-k$ . .....
- b)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$  avec  $j = n+1-k$ . .....
- c)  $\sum_{k=1}^n k2^k$  avec  $j = k-1$ . .....
- d)  $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$  avec  $j = k-2$ . .....

## Sommes et produits télescopiques

### Calcul 19.5 — Sommes télescopiques.



Calculer les sommes suivantes.

- a)  $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$  .....
- b)  $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$  .....
- c)  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$  .....
- d)  $\sum_{k=1}^n k \times k!$  .....

### Calcul 19.6 — Produits télescopiques.



Calculer les produits suivants.

- a)  $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$  .....
- b)  $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-3}$  .....
- c)  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$  .....
- d)  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$  .....

## À l'aide d'une décomposition en éléments simples

### Calcul 19.7



Calculer les sommes suivantes.

- a)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  .....
- b)  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$  .....

## Sommation par paquets

### Calcul 19.8



Calculer les sommes suivantes.

a)  $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$  .....

b)  $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$  .....

## Sommes doubles

### Calcul 19.9



Calculer les sommes doubles suivantes.

a)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$  .....

b)  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$  .....

c)  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$  .....

d)  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)^2$  .....

e)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j)$  .....

f)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$  .....

## Coefficients binomiaux

## Prérequis

Factorielle. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre  $n$  désigne un entier naturel non nul.

## Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

## Calcul 20.1 — Pour s'échauffer.



Donner la valeur des expressions suivantes :

a)  $\frac{101!}{99!}$  .....

d)  $\binom{6}{2}$  .....

b)  $\frac{10!}{7!}$  .....

e)  $\binom{8}{3}$  .....

c)  $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$  .....

f)  $4 \times \binom{7}{4}$  .....

## Calcul 20.2 — Pour s'échauffer — bis.



Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a)  $6 \times 7 \times 8 \times 9$  .....

c)  $2 \times 4 \times \dots \times (2n)$  .....

b)  $\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$  .....

d)  $3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)$  ...

## Calcul 20.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre  $k$  désigne un entier naturel tel que  $k < n$ .

a)  $\binom{n}{2}$  (pour  $n \geq 2$ ) .....

d)  $\frac{(n+2)!}{n!}$  .....

b)  $\binom{n}{3}$  (pour  $n \geq 3$ ) .....

e)  $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$  .....

c)  $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$  .....

f)  $\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}}$  .....

## Calcul 20.4 — Avec des paramètres — bis.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre  $a$  désigne un nombre non nul.

a)  $\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!}$  .....

b)  $\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$  .....

# Autour du binôme de Newton

## Calcul 20.5



Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- a)  $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$  .....
- c)  $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k}$  .....
- b)  $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$  .....
- d)  $\sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$  .....

## Calcul 20.6



- a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton  $(1 + 1)^n + (1 - 1)^n$  .....
- b) Calculer  $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$  .....

## Calcul 20.7



En utilisant la fonction  $x \mapsto (1 + x)^n$ , ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

- a)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  .....
- c)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2$  .....
- b)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k$  .....
- d)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$  .....

## Calcul 20.8



- a) Donner le coefficient de  $x^n$  dans le développement de  $(1 + x)^{2n}$  .....
- b) En donner une autre expression en développant le produit  $(1 + x)^n(1 + x)^n$  .....
- c) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$  .....

## Manipulation des fonctions usuelles

### Prérequis

Dérivation, équations du second degré.

## Calculs de valeurs

### Calcul 21.1 — Fonctions circulaires réciproques.



Calculer les valeurs suivantes.

a)  $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$  .....

d)  $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  .....

b)  $\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$  .....

e)  $\arctan(1)$  .....

c)  $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  .....

f)  $\arccos\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$  .....

### Calcul 21.2 — Valeurs des fonctions hyperboliques.



Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$ .

a)  $\text{ch}(0)$  .....

d)  $\text{sh}(\ln(3))$  .....

b)  $\text{sh}(0)$  .....

e)  $\text{ch}(\ln(2/3))$  .....

c)  $\text{ch}(\ln(2))$  .....

f)  $\text{th}(\ln(2))$  .....

### Calcul 21.3 — Identités de trigonométrie hyperbolique.



Soient  $x$  et  $y$  des réels.

Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, les expressions suivantes.

a)  $\text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x)$  .....

b)  $\text{ch}(x)\text{ch}(y) - \text{sh}(x)\text{sh}(y)$  .....

## Résolution d'équations

### Calcul 21.4 — Fonctions $x \mapsto a^x$ .



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

a)  $3^x = \frac{9^x}{2}$  .....

c)  $2^x = 3 \times 4^x$  .....

b)  $4^x = 2 \times 2^x$  .....

d)  $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$  ...

**Calcul 21.5 — Fonctions  $x \mapsto a^x$  (plus difficile).**



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

- a)  $2^x + 4^x = 4$  .....
- b)  $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$  .....
- c)  $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$  .....
- d)  $3^x + 3^{2x} - 1 = 0$ . .....

**Calcul 21.6 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.**



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in [-1, 1]$  pour les deux premiers calculs, et  $x \in \mathbb{R}$  pour les autres.

- a)  $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$  .....
- b)  $\cos(\arccos(x)) = 0$  .....
- c)  $\arccos(\cos(x)) = 0$  .....
- d)  $\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3}$  .....
- e)  $\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3}$  .....
- f)  $\tan(\arctan(x)) = 1$  .....

**Calcul 21.7 — Équations avec des fonctions hyperboliques.**



Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

On rappelle que, pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$ .

- a)  $\text{ch}(x) = \sqrt{5}$  .....
- b)  $\text{sh}(x) = 1$  .....
- c)  $\text{th}(x) = \frac{1}{3}$  .....
- d)  $\text{ch}(x) \leq 4$  .....
- e)  $\text{sh}(x) \geq 3$  .....
- f)  $\text{th}(x) \leq \frac{1}{2}$  .....

## Dérivation

**Calcul 21.8 — Quelques calculs de dérivées.**



Dériver les fonctions suivantes.

- a)  $x \mapsto 2^x + x^2$  .....
- b)  $x \mapsto \frac{3^x}{5^x + 1}$  .....
- c)  $x \mapsto x^x$  .....
- d)  $x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$  .....

**Calcul 21.9 — Quelques calculs de dérivées — bis.**



Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$ .

- |  |                      |   |                      |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $x \mapsto \arcsin(x^2) \dots\dots$             | <input type="text"/> | c) $x \mapsto \arctan(\text{th}(x)) \dots$        | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto \text{ch}(x)\text{sh}(x) \dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \text{sh}(\text{ch}(x)) \dots\dots$ | <input type="text"/> |

**Calcul 21.10 — Deux dérivées importantes.**



- |   |                      |
|---|----------------------|
| a) $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x) \dots\dots\dots$                      | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

**Calcul 21.11 — Des dérivées plus compliquées.**



Dériver les fonctions suivantes. Dans ce qui suit, la fonction  $F$  est une primitive de  $x \mapsto e^{-x^2}$ .

- |  |                      |
|--|----------------------|
| a) $x \mapsto F(x^x) \dots\dots\dots$                                  | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\text{ch}(x))}) \dots\dots\dots$             | <input type="text"/> |
| c) $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x \arcsin(x) \dots\dots\dots$             | <input type="text"/> |
| d) $x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

## Suites numériques

## Prérequis

Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

## Calcul de termes

## Calcul 22.1 — Suite explicite.

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$ . Calculer :

- a)  $u_0$  .....       c)  $u_{n+1}$  .....
- b)  $u_1$  .....       d)  $u_{3n}$  .....

## Calcul 22.2 — Suite récurrente.

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$ . Calculer :

- a) son troisième terme .....       b)  $u_3$  .....

## Calcul 22.3 — Suite récurrente.

On définit la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  par  $v_1 = \sqrt{2}$  et  $\forall n \geq 1, v_{n+1} = \sqrt{v_n}$ . Calculer :

- a)  $v_3$  .....       b) son sixième terme .....

## Calcul 22.4 — Suite récurrente.

On définit la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $w_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n^2$ . Calculer :

- a)  $w_2$  .....       b) son centième terme .....

## Calcul 22.5 — Suite explicite.

Soit la suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \ln\left(\frac{n^n}{2^n}\right)$ . Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

- a)  $t_{2n}$  .....       b)  $t_{4n}$  .....

## Suites arithmétiques et géométriques

## Calcul 22.6 — Suite arithmétique.

La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

- a)  $a_{10}$  .....       c)  $a_{1\ 000}$  .....
- b)  $s_{100} = a_0 + a_1 + \dots + a_{99}$  .....       d)  $s_{101} = a_0 + a_1 + \dots + a_{100}$  .....

**Calcul 22.7 — Suite arithmétique.**



La suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  vérifiant que  $b_{101} = \frac{2}{3}$  et  $b_{103} = \frac{3}{4}$ . Calculer :

- a)  $b_{102}$  .....       b)  $r$  .....

**Calcul 22.8 — Suite géométrique.**



La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de premier terme  $g_0 = 3$  et de raison  $\frac{1}{2}$ . Calculer :

- a) Son dixième terme est : .....       c)  $g_{10}$  .....   
 b)  $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \dots + g_9$  .....       d)  $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \dots + g_{10}$  .....

**Calcul 22.9 — Suite géométrique.**



La suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q > 0$  vérifiant que  $h_{11} = \frac{5\pi}{11}$  et  $h_{13} = \frac{11\pi}{25}$ . Calculer :

- a)  $h_{12}$  .....       b)  $q$  .....

## Suites récurrentes sur deux rangs

**Calcul 22.10**



Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$ . Calculer :

- a)  $u_n$  .....       b)  $u_5$  .....

**Calcul 22.11**



Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = \sqrt{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$ . Calculer :

- a)  $v_n$  .....       b)  $v_2$  .....

**Calcul 22.12 — Suite de Fermat.**



Soit la suite  $(F_n)_{n \geq 0}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n = 2^{2^n} + 1$ . Calculer :

- a)  $F_3$  .....       d)  $F_n \times (F_n - 2)$  .....   
 b)  $F_4$  .....       e)  $F_n^2$  .....   
 c)  $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$  .....       f)  $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$  .....

## Développements limités

### Prérequis

Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles, ainsi que la formule de Taylor-Young.

**Avertissement :** Les développements limités peuvent se donner au « sens faible » (avec les petits  $o(\cdot)$ ) ou « au sens fort » (avec les grands  $O(\cdot)$ ). Volontairement, aucune de ces deux formes n'est imposée. Mais, pour des raisons de concision, une seule d'entre elles est donnée dans les éléments de correction de chaque question.

## Développements limités

### Calcul 23.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions.



Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle  $x$  définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4 :  $\sin(x) + 2\ln(1+x)$  .....

b) À l'ordre 4 :  $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$  .....

c) À l'ordre 6 :  $\sin(x)(\cosh(x) - 1)$  .....

d) À l'ordre 6 :  $e^x \sin(x)$  .....

### Calcul 23.2 — Développements limités d'une fonction composée.



Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle  $x$  définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4, en 0 :  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  .....

b) À l'ordre 6, en 0 :  $\sqrt{\cos(x)}$  .....

c) À l'ordre 3, en 0 :  $e^{e^{ix}}$  .....

d) À l'ordre 2, en 1 :  $\frac{\ln(2-x)}{x^2}$  .....

### Calcul 23.3 — Développements limités d'une fonction composée.



Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle  $x$  définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 2, en  $\frac{\pi}{3}$  :  $\sin(\pi \cos(x))$  .....

b) À l'ordre 3, en  $\frac{\pi}{4}$  :  $\tan(x)$  .....

c) À l'ordre 7, en  $\frac{\pi}{2}$  :  $\cos(\pi \sin(x))$  .....

# Développements asymptotiques

## Calcul 23.4



Former le développement asymptotique, à la précision et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle  $x$  définie par l'expression suivante :

a) À la précision  $x^2$ , en  $0$  :  $\frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$  .....

b) À la précision  $\frac{1}{x^5}$ , en  $+\infty$  :  $\frac{\sin(1/x)}{x+1}$  .....

c) À la précision  $\frac{1}{x^3}$ , en  $+\infty$  :  $x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x)$  .....

d) À la précision  $\frac{e^x}{x^2}$ , en  $+\infty$  :  $\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{x^2}$  .....

# Polynômes

## Prérequis

Opérations sur les polynômes. Division euclidienne. Évaluation. Racines.

## Autour de la division euclidienne

### Calcul 24.1 — Pour s'échauffer.



Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le quotient  $Q$  et le reste  $R$  de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  :

a)  $A = X^3 + X^2 - X + 1$ ,  $B = X - 1$  .....

b)  $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1$ ,  $B = X^2 + X + 1$  .....

c)  $A = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1$ ,  $B = X^3 + X^2 + 2$  .....

d)  $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1$ ,  $B = 2X^3 - X^2 - X + 1$  .....

### Calcul 24.2 — Avec des degrés arbitraires.



La lettre  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste  $R$  de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  :

a)  $A = X^n$ ,  $B = X - 1$  .....

b)  $A = X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}$ ,  $B = X^2 + X + 1$  .....

c)  $A = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ ,  $B = (X - 2)^2$  .....

d)  $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n$ ,  $B = X^3 - 2X + 1$  .....

### Calcul 24.3 — Avec des opérations.



Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste  $R$  de la division euclidienne de  $P$  par  $X^4$  :

a)  $P = A + B$  où  $A = X^5 + X - 2$  et  $B = X^4 + X - 1$  .....

b)  $P = A \times B$  où  $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$  et  $B = X^2 + X + 1$  .....

c)  $P = A \circ B$  où  $A = X^2 - 3X + 1$  et  $B = (X - 2)^2$  .....

d)  $P = A \circ B$  où  $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$  et  $B = X^3 + X^2 - 2X + 1$  .....

**Calcul 24.4 — Pour évaluer en un point.**



Soit  $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$ .

a) Calculer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 1$ . .....

b) Calculer  $P(i)$ . .....

**Calcul 24.5 — Pour évaluer en un point — bis.**



Soit  $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$ .

a) Calculer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 - 2$ . .....

b) Calculer  $P(\sqrt{2})$ . .....

**Calcul 24.6 — Pour évaluer en un point — ter.**



Soit  $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$ .

En vous inspirant des deux exercices précédents, calculer :

a)  $P(\sqrt{2} - 1)$ . .....

b)  $P(i + 1)$ . .....

**Calcul 24.7 — Pour factoriser.**



Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes ci-dessous, connaissant certaines racines :

a)  $P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X + 1$  où 1 est racine multiple. ....

b)  $P = X^4 - 4X^3 + 11X^2 - 14X + 10$  où  $1 + i$  est racine. ....

c)  $P = X^6 - 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 3X - 2$  où 1 est racine multiple et  $i$  est racine.

## Décomposition en éléments simples

### Prérequis

Polynômes (factorisation, division euclidienne), primitives usuelles. La forme des décompositions de fractions à pôle multiple ou avec un dénominateur irréductible de degré 2 sont non exigible en PTSI, on peut démarrer avec la forme théorique suggérée dans la correction.

## Calculs de décompositions en éléments simples

### Calcul 25.1 — Uniquement des pôles simples.



Effectuer la décomposition en éléments simples (sur  $\mathbb{C}$ ) des fractions rationnelles suivantes.

a)  $\frac{X^4 - 2}{X(X + 1)(X + 2)}$  .....

b)  $\frac{X^3 + 2}{(X - 1)X(X + 1)}$  .....

c)  $\frac{X^2}{(X - \pi)(X + \pi)}$  .....

### Calcul 25.2



Même exercice.

a)  $\frac{X + 1}{(X + 2)(X + e)}$  .....

b)  $\frac{X^2 + X + 1}{(X - i)(X + i)(X - 1)}$  .....

c)  $\frac{X^2 + 2}{(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{3})}$  .....

### Calcul 25.3 — Avec des pôles multiples (non exigible PTSI, on peut démarrer avec la forme théorique dans la correction).



Effectuer la décomposition en éléments simples (sur  $\mathbb{C}$ ) des fractions rationnelles suivantes.

a)  $\frac{X + 1}{(X - 1)^2(X - 2)(X - 3)}$  ..

b)  $\frac{2 + X^2}{(X + 1)X^2(X - 1)^2}$  .....

c)  $\frac{1 - X}{X(X + \pi)^2}$  .....

d)  $\frac{1}{(X - i)^2(X - 1 - i)^2}$  .....

**Calcul 25.4 — À vous de factoriser.**



Effectuer la décomposition en éléments simples (sur  $\mathbb{C}$ ) des fractions rationnelles suivantes.

a)  $\frac{X-3}{X^4-1}$  .....

b)  $\frac{2X^3+1}{X^4-3X^2+2X}$  .....

**Calcul 25.5 — Calculs de sommes.**



Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ .

Calculer les sommes suivantes, après avoir fait une décomposition en éléments simples de leur terme général.

a)  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$  .....

b)  $\sum_{k=2}^n \frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$  .....

## Calcul d'intégrales de fractions rationnelles

**Calcul 25.6 — Pôles simples ou multiples.**



Calculer les intégrales suivantes

a)  $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} dx$  .....

d)  $\int_1^2 \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2} dx$  .....

b)  $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-2)} dx$  .....

e)  $\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1} dx$  .....

c)  $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx$  .....

f)  $\int_2^3 \frac{x}{x^4-1} dx$  .....

Calcul 25.7 — Primitives.



Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

a)  $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$  .....

b)  $x \mapsto \frac{1}{(1 - 2x)^3}$  .....

c)  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2}$  .....

d)  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$  .....

e)  $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 2x + 3}$  .....

f)  $x \mapsto \frac{x^4}{(x - 1)(x - 2)(x + 1)}$  .....

g)  $x \mapsto \frac{x}{(x^2 + 2)(x + 1)}$  .....

h)  $x \mapsto \frac{x - 2}{(x + 1)^2(x - 1)^2}$  .....

## Calcul matriciel

### Prérequis

Calculs algébriques (sommés), coefficients binomiaux.

## Calcul matriciel

### Calcul 26.1 — Calculs de produits matriciels.



Dans cet exercice, on note  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \quad 7 \quad -2),$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a)  $A^2 \dots$

d)  $E \times B$

g)  $D^2 \dots$

b)  $A^3 \dots$

e)  $A \times E$

h)  $D \times C$

c)  $B \times E$

f)  $B \times A$

i)  $B^T \times B$

**Calcul 26.2 — Calcul de puissances.**



On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice  $D$  étant de taille  $n \times n$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), et où  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance  $k$ -ième, pour  $k \in \mathbb{N}$ .

a) $A^2 \dots$	e) $B^3 \dots$	i) $C^k \dots$
b) $A^3 \dots$	f) $B^k \dots$	j) $D^2 \dots$
c) $A^k \dots$	g) $C^2 \dots$	k) $D^3 \dots$
d) $B^2 \dots$	h) $C^3 \dots$	l) $D^k \dots$

**Calcul 26.3 — Calculs avec des sommes.**



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ,  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \quad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}, \quad c_{ij} = \delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}.$$

Donner le coefficient d'indice  $(i, j)$  des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole  $\sum$ .

On rappelle que  $\binom{i}{j} = 0$  quand  $j > i$ .

a) $A \times B \dots\dots\dots$	c) $B^T \times B \dots\dots\dots$
b) $B^2 \dots\dots\dots$	d) $A \times C \dots\dots\dots$

**Calcul 26.4 — Deux calculs plus difficiles.**



Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

En utilisant les matrices de l'exercice précédent, calculer les termes généraux suivants.

a)  $[A^2]_{i,j}$  .....       b)  $[C^2]_{i,j}$  .....

## Inversion de matrices

**Calcul 26.5 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.**



Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) $A \dots$	<input type="text"/>	d) $D \dots$	<input type="text"/>	g) $G \dots$	<input type="text"/>
b) $B \dots$	<input type="text"/>	e) $E \dots$	<input type="text"/>	h) $H \dots$	<input type="text"/>
c) $C \dots$	<input type="text"/>	f) $F \dots$	<input type="text"/>	i) $J \dots$	<input type="text"/>

**Calcul 26.6 — Matrices dépendant d'un paramètre.**



Soit  $\lambda$  un paramètre réel. On note  $A$  et  $B$  les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur  $\lambda$  pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour  $A$   
inversible ...

c) CNS pour  $B$   
inversible ...

b) Inverse de  $A$  ...

d) Inverse de  $B$  ...

# Algèbre linéaire

## Prérequis

Coordonnées. Applications linéaires. Matrices. Rang.

## Vecteurs

### Calcul 27.1



Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

a)  $u = (1, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((0, 1), (-1, 2))$ . .....

b)  $u = (1, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((-1, 2), (0, 1))$ . .....

c)  $u = (3, 4)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 2), (12, 13))$ . .....

d)  $u = (1, 2, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1))$ . .....

e)  $u = (-1, 0, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3))$ . .....

f)  $u = X^3 + X^2$ ,  $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$  .....

g)  $u : x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $\mathcal{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$  .....

## Calculs de rangs

### Calcul 27.2 — Sans calcul.



Déterminer le rang des matrices suivantes :

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  .....

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$  .....

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$  .....

e)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$  .....

f)  $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  .....

**Calcul 27.3**



Déterminer le rang des matrices suivantes :

a)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  .....

b)  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  .....

d)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  .....

## Matrices et applications linéaires

**Calcul 27.4 — Matrices d'endomorphismes.**



Pour les applications linéaires  $f$  et les bases  $\mathcal{B}$  suivantes, déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

a)  $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ . ....

b)  $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$ ,  $\mathcal{B} = ((0, 1), (1, 0))$ . ....

c)  $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 2), (3, 4))$  .....

d)  $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$  .....

e)  $f : P \mapsto P(X + 2)$ ,  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  .....

**Calcul 27.5 — Matrices d'applications linéaires.**



Pour les applications linéaires  $f$  et les bases  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  suivantes, déterminer la matrice de  $f$  de la base  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

a)  $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$ ,  $\mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1))$ ,  $\mathcal{B}' = ((0, 1), (1, 0))$ .

b)  $f : P \mapsto P'$ ,  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ ,  $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$ . .....

## Équations différentielles

### Prérequis

Équations différentielles.

## Équations d'ordre 1 à coefficients constants

### Calcul 28.1



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $y' = 12y$  et  $y(0) = 56$  .....

b)  $y' = y + 1$  et  $y(0) = 5$  .....

c)  $y' = 3y + 5$  et  $y(0) = 1$  .....

d)  $y' = 2y + 12$  et  $y(0) = 3$  .....

### Calcul 28.2



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $5y' = -y$  et  $y(1) = e$  .....

b)  $7y' + 2y = 2$  et  $y(7) = -1$  .....

c)  $y' - \sqrt{5}y = 6$  et  $y(0) = \pi$  .....

d)  $y' = \pi y + 2e$  et  $y(\pi) = 12$  .....

## Équations d'ordre 1 à coefficients variables

### Calcul 28.3 — Equations homogènes.



Donner l'ensemble des solutions aux équations différentielles suivantes

a)  $y'(x) + xy(x) = 0$  .....

b)  $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0$  sur  $]0, +\infty[$  .....

c)  $y'(x) = \cos x \times y(x)$  .....

**Calcul 28.4 — Avec second membre.**



Résoudre les équations différentielles suivantes. Pour le calcul d'une solution particulière, on choisira entre la recherche d'une solution simple et la méthode de variation de la constante.

- a)  $y'(x) + x^2y(x) = -x^2$  (solution part. simple). .....
- b)  $y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x^2$  sur  $]0, +\infty[$  (avec variation de la constante). .....
- c)  $y'(x) + y(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ . .....
- d)  $2xy'(x) - y(x) = x$  sur  $]0, +\infty[$ . .....

## Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

**Calcul 28.5 — Une équation avec conditions initiales.**



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

- a)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....
- b)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$  .....
- c)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 3$  .....
- d)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 3i$  .....

**Calcul 28.6 — Racines doubles, racines simples.**



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

- a)  $y'' - y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$  .....
- b)  $y'' + 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 3$  .....
- c)  $y'' + y' - 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....
- d)  $y'' - 2y' + y = 0$  et  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 1$  .....
- e)  $y'' + 4y' + 4y = 0$  et  $y(1) = 1$  et  $y'(1) = -3$  .....

**Calcul 28.7 — Racines complexes.**



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

- a)  $y'' + y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....
- b)  $y'' + y' + y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = -1$  .....
- c)  $y'' + 2y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$  .....
- d)  $y'' - 2y' + 5y = 0$  et  $y(0) = i$  et  $y'(0) = -i$  .....

## Séries numériques

## Prérequis

Séries usuelles (convergence et sommes), décomposition en éléments simples.

## Séries géométriques, exponentielles, de Riemann

Dans les calculs de cette section, reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

## Calcul 29.1 — Séries géométriques.



a)  $\sum_{k \geq 0} 2^k$  .....

c)  $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$  .....

b)  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k}$  .....

d)  $\sum_{k \geq 10} \frac{1}{3^k}$  .....

## Calcul 29.2 — Séries exponentielles.



a)  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$  .....

c)  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k \times k!}$  .....

b)  $\sum_{k \geq 2} \frac{2^k}{k!}$  .....

## Calcul 29.3 — Séries de Riemann.



a)  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$  .....

b)  $\sum_{k \geq 3} \frac{1}{\sqrt{k}}$  .....

c)  $\sum_{k \geq 6} \frac{1}{k}$  .....

## Calcul 29.4 — Séries géométriques – bis.



a)  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^{2k}}$  .....

c)  $\sum_{k \geq 3} \frac{i^k}{7^{k-1}}$  .....

b)  $\sum_{k \geq 1} e^{-(k-1)}$  .....

d)  $\sum_{k \geq 4} \frac{1}{(1 - i\sqrt{2})^k}$  .....

## Séries télescopiques

## Calcul 29.5



Prouver la convergence et calculer la somme de chacune des séries suivantes :

a)  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 + k}$  .....

c)  $\sum_{k \geq 2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2 - 1}\right)$  .....

b)  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k}$  .....

d)  $\sum_{k \geq 0} \arctan\left(\frac{(k+2) - (k+1)}{1 + (k+2)(k+1)}\right)$  .....

# Séries géométriques dérivées

## Prérequis

On pourra utiliser le fait que si  $\alpha \in ]-1, 1[$ , les séries

$$\sum_{k \geq 1} k\alpha^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 2} k(k-1)\alpha^{k-2},$$

appelées *séries géométriques dérivées*, convergent et ont pour somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha^{k-2} = \frac{2}{(1-\alpha)^3}.$$

### Calcul 29.6 — Séries géométriques dérivées.



Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a)  $\sum_{k \geq 1} k2^k$  .....

b)  $\sum_{k \geq 0} k \frac{1}{2^{k-1}}$  .....

### Calcul 29.7 — Séries géométriques dérivées – bis.



Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a)  $\sum_{k \geq 1} k2^{-k}$  .....

b)  $\sum_{k \geq 1} (3k+1) \frac{1}{3^k}$  .....

c)  $\sum_{k \geq 1} k(k-1) \frac{1}{2^{k-2}}$  .....

d)  $\sum_{k \geq 2} k(k-1)e^{-(k-2)}$  .....

## Déterminants

### Prérequis

Nombres complexes.

## Calculs en dimension deux

### Calcul 30.1



Soit  $a$  un nombre réel.

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a)  $\begin{pmatrix} -a & a \\ a & a \end{pmatrix}$  .....       c)  $\begin{pmatrix} i & 3 \\ -2i & 5i \end{pmatrix}$  .....

b)  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$  .....       d)  $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$  .....

### Calcul 30.2



Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a)  $\begin{pmatrix} 3/2 & 7/2 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}$  .....       d)  $\begin{pmatrix} 85 & 72 \\ 53 & 91 \end{pmatrix}$  .....

b)  $\begin{pmatrix} \ln(2) & \ln(8) \\ -2 & \ln(e^3) \end{pmatrix}$  .....       e)  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 - \sqrt{32} \\ 2 + \sqrt{8} & 3 - \sqrt{8} \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/7 \\ 5/9 & 7/8 \end{pmatrix}$  .....

## Calculs en dimension trois

### Calcul 30.3



Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

On rappelle que le nombre complexe  $j$  vérifie  $j^3 = 1$ .

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  .....

b)  $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} 1 & -j & j \\ j & -j^2 & 1 \\ -j^2 & 1 & j^2 \end{pmatrix}$  .....

**Calcul 30.4**

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a)  $\begin{pmatrix} j & -j & j \\ -j & j & j \\ j & j & -j \end{pmatrix}$  .....

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2+i & -2+i \\ -i & 2i-1 & 1-2i \\ -1 & i & 2 \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{15} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$  .....

**Calcul 30.5**Soit  $x$ ,  $y$  et  $z$  des nombres réels et  $a$  un nombre réel strictement positif.

Calculer le déterminant de chacune des matrices d'ordre trois suivantes.

a)  $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$  .....

b)  $\begin{pmatrix} \ln(a) & \ln(a^2) & -2\ln(a) \\ \ln(\sqrt{a}) & -2\ln(a) & \ln(a^2) \\ -\ln(a^2) & \ln(a) & 2\ln(\sqrt{a}) \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$  .....

d)  $\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$  .....

## Fonctions de deux variables

## Prérequis

Fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité)

## Les fondamentaux

## Calcul 31.1 — Ensembles de définition.



Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes.

a)  $(x, y) \mapsto \arcsin |x - y|$  .....

b)  $(x, y) \mapsto \ln(x) + \sqrt{y}$  .....

c)  $(x, y) \mapsto \frac{x\sqrt{y}}{x^2 + y^2}$  .....

d)  $(x, y) \mapsto \sqrt{16 - x^2 - y^2} \ln(x^2 + y^2 - 16)$  .....

## Calcul 31.2 — Dérivation partielle.



Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

a)  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^5 + xy + \pi$  .....

b)  $f : (x, y) \mapsto \sin(2xy - y)$  .....

c)  $f : (x, y) \mapsto (x^2y, x^2 - y^2)$  .....

d)  $f : (x, y) \mapsto \arctan(2x + y)$  .....

## Calcul 31.3



Même exercice.

a)  $f : (x, y) \mapsto \cos(x - y)$  .....

b)  $f : (x, y) \mapsto x \cos(e^{xy})$  .....

c)  $f : (x, y) \mapsto x^y$  .....

d)  $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  .....

## Plans tangents

### Calcul 31.4 — Equations de plan tangent.



On rappelle que l'équation du plan tangent à la surface définie par  $f$  en un point  $(x_0, y_0)$  est donnée par (faire l'analogie avec l'équation de la tangente à une courbe, et penser formule de Taylor) :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Donner l'équation du plan tangent en un point  $(x_0, y_0)$  des surfaces définies par les fonctions de deux variables suivantes. On donnera la réponse sous la forme  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ .

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  en  $(1, 1)$  .....

b)  $f(x, y) = \sin(\pi xy)e^{2x^2y-1}$  en  $(1, \frac{1}{2})$  .....

c)  $f(x, y) = x^2 - y^2$  en  $(0, 0)$  .....

d)  $f(x, y) = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$  en  $(1, 3)$  .....

## Composition de fonctions

### Calcul 31.5 — Règle de la chaîne.



On note  $w(t) = f(u(t), v(t))$ . Calculer  $w'(t)$  pour chacune des fonctions  $f, u, v$  définies ci-dessous.

a)  $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2$  avec  $\begin{cases} u = \sin \\ v = \cos \end{cases}$  .....

b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$  avec  $\begin{cases} u(t) = e^{2t} \\ v(t) = e^{-t} \end{cases}$  .....

c)  $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$  avec  $\begin{cases} u(t) = 3 \sin(2t) \\ v(t) = 4 \cos(2t) \end{cases}$  .....

### Calcul 31.6 — Changements de variables.



Soient  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $c \in \mathbb{R}^*$ .

Exprimer les dérivées partielles de  $f \circ \varphi$  selon celles de  $f$  pour les fonctions suivantes.

a)  $\varphi : (u, v) \mapsto \left( \frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right)$  .....

b)  $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$  .....